Mathématiques

Enseignement scientifique

maths-mde.fr

Table des matières

1 Pourcentages

1.1 Proportions

Propriété 1.1

La proportion, exprimée en pourcentage, d'une grandeur x par rapport à une grandeur y est obtenue en effectuant le calcul $\frac{x}{y} \times 100$.

Exemple. On réalise un sondage auprès de 400 personnes concernant les mesures prises par le gouvernement. Le nombre de personnes interrogés est $n_E = 400$. Parmi ceux-ci, le nombre de ceux satisfaits est $n_S = 94$. La proportion de personnes pleinement satisfaites des mesures prises par le gouvernement est $p = \frac{n_S}{n_E} = \frac{94}{400}$, soit $0,235 = 23,5\%$.

Propriété 1.2

Calculer $x\%$ d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

Exemple. 30 euros représente 5% de 600 euros. En effet, $\frac{5}{100} \times 600 = 30$.

Exercice 0

Sur 150 candidats à un examen, 120 ont été admis. Quel est le pourcentage d'élèves admis ?

....
....
....

Exercice 1

Parmi les 2 000 spectateurs d'un match de basket-ball, 480 ont moins de 20 ans. Calculer la proportion de spectateurs ayant moins de 20 ans.

....
....
....
....

Exercice 2

Le prix d'un livre hors taxe est de 40 €. Son prix toutes taxes comprises est de 42 €. Déterminer le montant de la taxe en %.

....
....
....
....
....

Exercice 3

Quel est le pourcentage correspondant à une réduction de 16 € sur un prix de 80 € ?

....
....
....
....

Exercice 4

Si 30 % d'une quantité Y vaut 60, que vaut Y ?

....
....
....

Exercice 5

Si 20 % d'une quantité Y vaut 80, que vaut Y ?

....

....

....

....

Exercice 6

Dans une entreprise de 250 personnes, 20 sont des cadres. Donner la proportion de cadres dans cette entreprise.

....

....

....

....

Exercice 7

Compléter les assertions suivantes :

1. **Prendre** 10 % d'une grandeur revient à la multiplier par ....
2. **Prendre** 1 % d'une grandeur revient à la multiplier par ....
3. **Prendre** $0,1$ % d'une grandeur revient à la multiplier par ....
4. **Prendre** $23,7$ % d'une grandeur revient à la multiplier par ....
5. Multiplier une grandeur par $0,34$ revient à **prendre** .... % de cette grandeur.
6. Multiplier une grandeur par $\frac{3}{4}$ revient à **prendre** .... % de cette grandeur.

Exercice 8

Par quel nombre est multipliée une quantité qui augmente de

1. 15 % ?...
2. 23 % ?...
3. $4,5$ % ? ....

Exercice 9

Par quel nombre est multipliée une quantité qui diminue de

1. 32 % ?...
2. $17,5$ % ? ....
3. 4 % ?...

Exercice 10

Quel est le pourcentage d'augmentation d'une quantité multipliée par

1. $1,03$? ....
2. $1,2$? ....
3. $1,065$? ....

Exercice 11

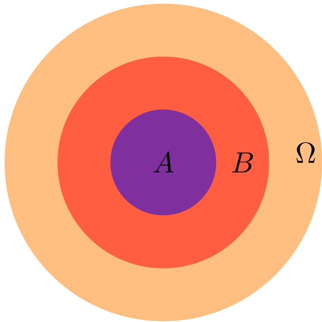
Quel est le pourcentage de diminution d'une quantité multipliée par

1. $0,95$? ....
2. $0,7$? ....
3. $0,52$? ....

1.2 Proportion d'une proportion

Propriété 1.3

On considère trois ensembles A, B et Ω emboités tels que $A \subset B \subset \Omega$.
On note p la proportion de la population de A dans la population de B.
On note p' la proportion de la population de B dans la population de Ω.
Alors la proportion de la population de A dans la population Ω est égale à $p \times p'$.



Exemple. Un maraîcher vend des légumes en direct à la ferme et sur des marchés mais aussi dans des supermarchés locaux. Au cours du mois de Juin, il a vendu 78% de sa production en direct, et parmi ces légumes, 65% ont été vendu à la ferme.

La proportion p_1 de légumes vendus en direct est $p_1 = 0,78$.
La proportion p_2 de légumes vendus à la ferme parmi ceux vendus en direct est $p_2 = 0,65$.
On calcule : $p = p_1 \times p_2 = 0,78 \times 0,65 = 0,507 = 50,7\%$.
La proportion de sa production vendu directement à la ferme a été de $50,7\%$.

Exercice 1

En 2020, les internautes représentent 65 % de la population mondiale. Les $\frac{4}{5}$ des internautes sont actifs sur les réseaux sociaux.
Quel pourcentage de la population mondiale utilise les réseaux sociaux ?

....
....
....
....

Exercice 2

Imad utilise un site de vidéos en streaming. Il a remarqué que 7 % des vidéos qu'il visionnait étaient des séries françaises. Par ailleurs, 35 % des vidéos qu'il a vues sont des séries. Déterminer la proportion de séries françaises parmi les séries regardées par Imad.

....
....
....
....

Exercice 3

Dans une classe, 40 % des élèves sont des filles et 30 % des filles sont demi-pensionnaires.
Quel est le pourcentage d'élèves de cette classe qui sont des filles demi-pensionnaires ?

....
....
....

Exercice 4

Au moment des soldes, un magasin propose une baisse de 10 % sur un article, suivie d'une nouvelle baisse de 20% sur ce même article.
Ces deux diminutions peuvent être remplacées par une diminution unique. Déterminer le pourcentage de cette diminution.

....

....

....

Exercice 5

Le prix d'un article augmente de 22% puis diminue de 15%. Quel est le pourcentage d'évolution de cet article ?

....

....

....

Exercice 6

Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2% par mois pendant un an, quel sera le pourcentage de diminution du nombre de chômeurs sur l'année ?

....

....

....

Exercice 7

Pendant un mois, le cours d'une action augmente de 10 % puis baisse de 9,5%.
Calculer le taux d'évolution de cette action au cours du mois (entre le début et à la fin). La valeur de l'action a-t-elle augmenté, baissée ?

....

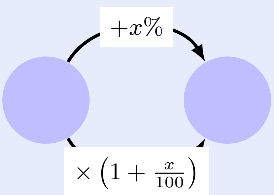
....

....

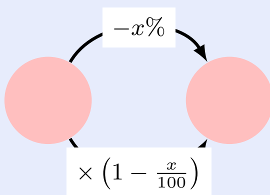
1.3 Évolution et pourcentages

Propriété 1.4

— Augmenter une grandeur d'un pourcentage de $x\%$ revient à multiplier par $(1 + \frac{x}{100})$.
$(1 + \frac{x}{100})$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la hausse.



— Diminuer une grandeur d'un pourcentage de $x\%$ revient à multiplier par $(1 - \frac{x}{100})$.
$(1 - \frac{x}{100})$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la baisse.



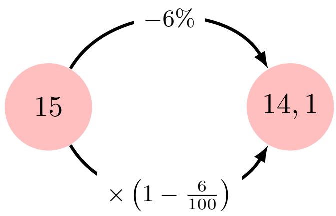
Exemples. Voici deux applications.

— Augmenter une grandeur de 3% revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{3}{100}\right) = 1,03$.

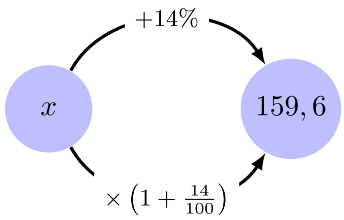
— Diminuer une grandeur de 15% revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0,85$.

Exemples. Schématisés

1. Si une action valant 15 euros subit une baisse de 6%, sa nouvelle valeur est de $15 \times 0,94 = 14,1$ euros.

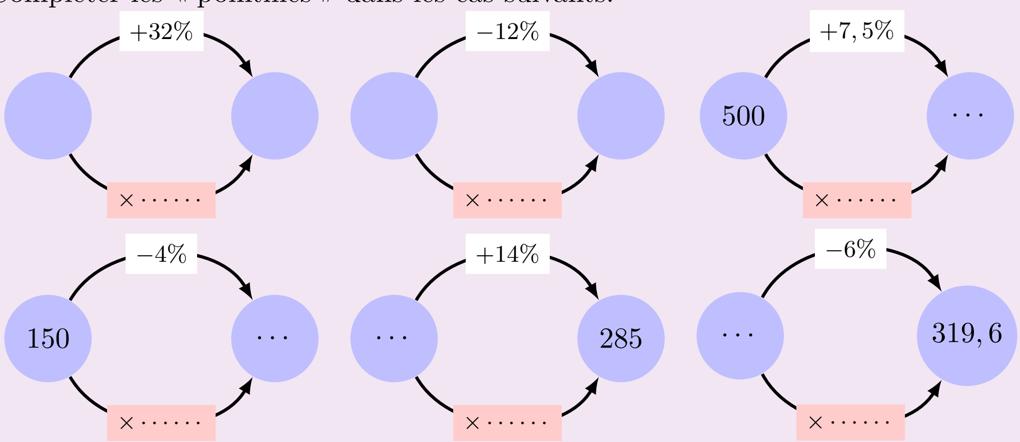


2. Le prix d'un produit est de $159,6$ euros après avoir subi une hausse de 14%. Le prix du produit avant la hausse était x tel que $x \times 1,14 = 159,6$. On obtient $x = \frac{159,6}{1,14} = 140$.



Exercice 0

Compléter les « pointillés » dans les cas suivants.



Exercice 1

Lors des soldes, le prix d'un article passe de 70 € à 28 €. Déterminer le pourcentage de baisse de ce prix.

....

....

....

Exercice 2

Sur un prix affiché à 480 € un commerçant accorde une remise de 20 %. Calculer le prix payé par le client.

....

....

....

Exercice 3

Le maillot officiel d'un grand club de foot parisien qui coûtait 85 €, bénéficie d'une réduction de 34 €. Quel est le pourcentage de la remise ?

....

....

....

1.4 Taux d'évolution

On considère deux valeurs numériques réelles strictement positives V_I et V_F. La valeur V_I est la valeur initiale et V_F la valeur finale.

Définition 1.5

— On appelle variation absolue la différence : $V_F - V_I$.

— On appelle taux d'évolution (ou variation relative) de V_I à V_F, le nombre T défini par : $T = \dfrac{V_F - V_I}{V_I}$.

Exemple. La population de la ville de Noisy le Grand passe de 55 000 à 74 250 habitants.
La variation absolue de cette population est de $74\ 250 - 55\ 000 = 19\ 250$.
La variation relative est de 35%. En effet, $\dfrac{74\ 250 - 55\ 000}{55\ 000} = 0,35$.

Remarque.
— Un taux d'évolution positif est un taux d'augmentation et un taux d'évolution négatif est un taux de diminution ou de baisse.
— Un taux d'évolution s'exprime toujours par rapport à la valeur initiale.

Propriété 1.6

Soit T le taux d'évolution entre V_I et V_F. Ainsi, $CM = 1 + T$.
Avec $CM = \dfrac{V_F}{V_I}$ le coefficient multiplicateur.

Exercice 1

Un prix a été multiplié par 0,6. Calculer son taux d'évolution en %.

....
....
....

Exercice 2

Augmenter de 3 % un nombre revient à multiplier ce nombre par :

....
....
....

Exercice 3

Multiplier un nombre par 0,17 équivaut à diminuer ce nombre de :

....
....
....

Exercice 4

Compléter les tableaux sachant que t est un taux d'évolution (en %) et CM le coefficient multiplicateur associé :

t	-10%	······
CM	······	1,57

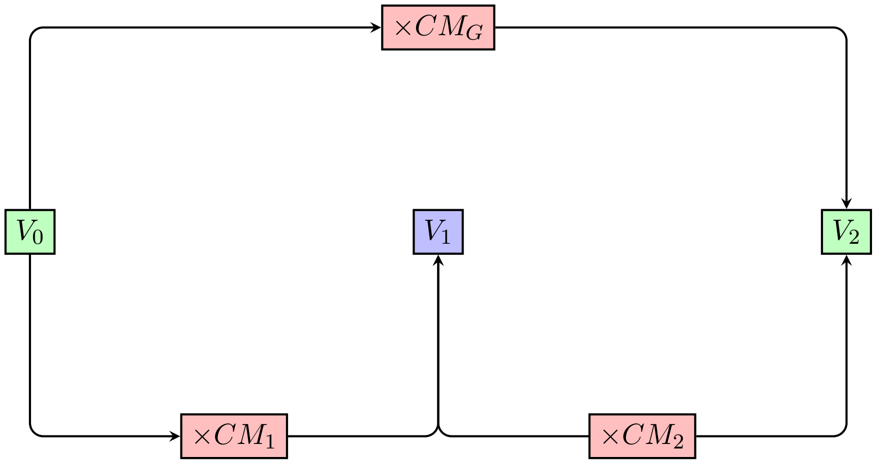
t	+2,03%	······
CM	······	0,88

....
....
....

1.5 Évolutions successives

Définition 1.7

Soit T_1 le taux d'évolution entre deux valeurs V_0 à V_1 et T_2 le taux d'évolution entre les valeurs V_1 à V_2.
L'évolution globale de V_0 à V_2 , noté T_G, a pour coefficient multiplicateur CM_G avec : $CM_G = CM_1 \times CM_2$.



Exemple. Le nombre d'abonnés d'un journal en ligne augmente de 30% avant de baisser de 10%.
Il est donc multiplié par $1,3$ puis par $0,9$. Alors $CM_G = 1,3 \times 0,9 = 1,17$.
Cela correspond à un taux de $1,17 - 1 = 0,17$.
Le taux d'évolution global est donc $T_G = 1,17 - 1 = 0,17$ soit 17%.

Exercice 1

Une action cotée en bourse a subi une baisse de 10 % suivie d'une hausse de 20 %.
Déterminer, sous forme de pourcentage, le taux d'évolution équivalent à ces deux évolutions successives.

....

....

....

....

....

Exercice 2

Un volume augmente de 10 % en un jour, puis de 5 % le jour suivant.
Déterminer le taux d'évolution correspondant à l'augmentation du volume sur la période des deux jours ?

....

....

....

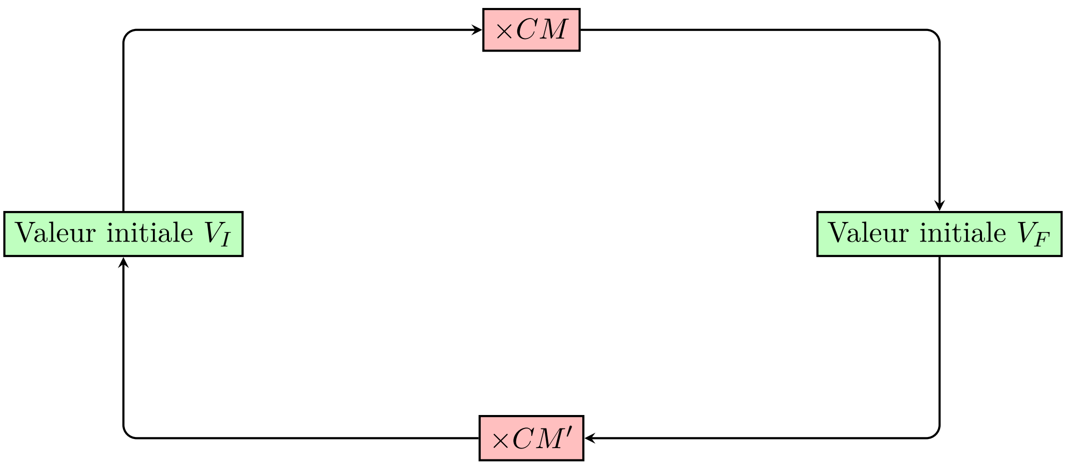
....

....

1.6 Évolution réciproque

Définition 1.8

Soit T le taux d'évolution entre deux valeurs V_I à V_F et CM son coefficient multiplicateur associé.
L'évolution T' de V_F à V_I est appelé le taux d'évolution réciproque de T dont le coefficient multiplicateur CM' associé est : $CM' = \dfrac{1}{CM}$.



Exemple. Un prix augmente de 25% : il a donc été multiplié par $CM = 1 + \frac{25}{100} = 1,25$.
Le coefficient multiplicateur réciproque qui permettrait de revenir au prix de départ est de : $CM' = \frac{1}{1,25} = 0,8$.
Or, $0,8 - 1 = -0,2$ ce qui correspond donc à une baisse de 20%.

Exercice 1

On a appliqué à un prix une augmentation de 22 %.
Déterminer le pourcentage de baisse qui permet de retrouver le prix initial (arrondir à 0,1 %).

....
....
....
....
....

Exercice 2

Un document a été photocopié et ses dimensions ont été réduites de 20 %.
De quel pourcentage doit-on augmenter les dimensions de ce document réduit pour revenir aux dimensions du document original ?

....
....
....
....
....

Exercice 3

Le prix hors taxes d'un produit est de 47,50 euros.
Calculer son prix TTC (toutes taxes comprises) si le taux de TVA est de 19,6 %.

....
....
....
....
....

Exercice 4

Le prix TTC d'un produit est de 52,75 euros.
Calculer son prix hors taxes sachant que la TVA pour ce produit est de 5,5 %.

....
....
....
....
....

2 Probabilité

2.1 Tableaux croisés

Définition 2.1

Un tableau croisé d'effectifs est un tableau à double-entrées présentant les valeurs du premier caractère en ligne et celles du second caractère en colonne.

- À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, le tableau indique le nombre d'individus présentant simultanément la valeur du premier caractère correspondant à cette ligne et la valeur du second caractère correspondant à cette colonne.
- On ajoute ensuite une ligne et une colonne « Total » indiquant le nombre d'individus présentant chacune des valeurs du caractère. Ce sont les effectifs marginaux.
- À l'intersection de la ligne et de la colonne « Total », on indique l'effectif total, c'est-à-dire le nombre d'individus de la population de référence.

Exemple. On place des boules toutes indiscernables au toucher dans un sac. Sur chaque boule colorée est inscrite une lettre. Le tableau suivant présente la répartition des boules.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	3	5	2	10
B	2	2	6	10
Total	5	7	8	20

Dans ce sac, il y a 2 boules bleues portant la lettre A.

Définition 2.2

- Les fréquences **marginales** correspondent aux fréquences de chaque caractère, par rapport à un effectif global.
- La fréquence conditionnelle se calcule par rapport à un sous-ensemble de l'effectif total.

Exemple. 1
En utilisant l'exemple précédent, on peut construire le tableau croisé de fréquences.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{10}{20}$
B	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$
Total	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$	1

Dans ce tableau, on peut lire par exemple, la fréquence de boules vertes portant la lettre B est égale à $\dfrac{2}{20}$.

Exemple. 2
En utilisant l'exemple précédent, on peut trouver les fréquences conditionnelles.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	1
B	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

Sur la première ligne, on peut lire, parmi les boules portant la lettre A, $\frac{3}{10}$ sont rouges, $\frac{5}{10}$ sont vertes et $\dfrac{2}{10}$ sont sont bleues.

Exercice 1

Le tableau ci-dessous indique la répartition de 200 élèves de Première TC d'un lycée selon leur sexe et leur régime :

	Filles	Garçons	Total
Externes	42	22	64
Internes	49	55	104
Demi-pensionnaires	21	11	32
Total	112	88	200

1. (a) Donner l'effectif total de cette population puis l'effectif marginal des filles.
   (b) En déduire la fréquence marginale des filles.
2. Déterminer la fréquence marginale en pourcentage des élèves internes.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des demi-pensionnaires parmi les garçons.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

Une banque compte 2500 clients. On sait que :

— 42 % des clients possèdent un plan épargne logement (PEL).
— Le quart des clients possède un compte épargne logement (CEL).
— 325 clients possèdent un PEL et CEL.

Compléter le tableau ci-après :

	Titulaire d'un PEL	Non titulaire d'un PEL	Total
Titulaire d'un CEL	......	......	......
Non titulaire d'un CEL	......	......	......
Total	......	......	......

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.2 Quelques rappels de probabilités

Définition 2.3

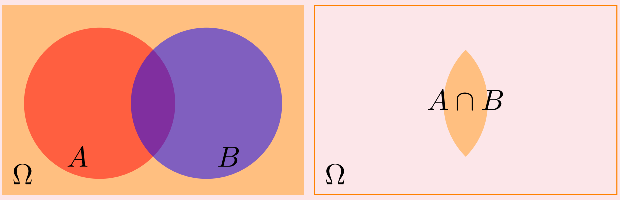
— Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.

— On appelle **univers**, l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles.

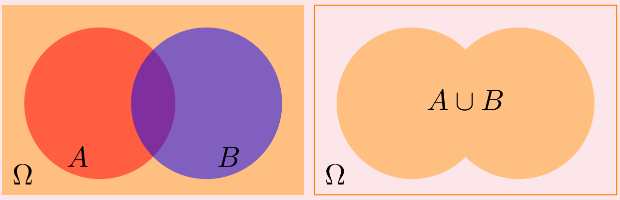
— On appelle **événement**, toute partie de l'univers.

— On appelle **événement élémentaire**, tout événement ne comportant qu'un seul élément.

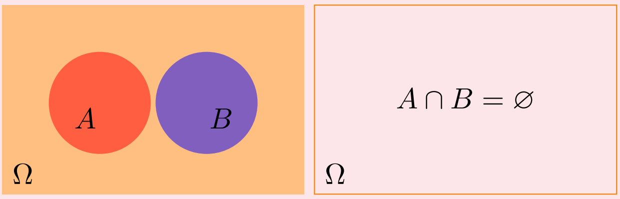
— L'événement $A \cap B$, autrement dit « A et B », est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A et à B.



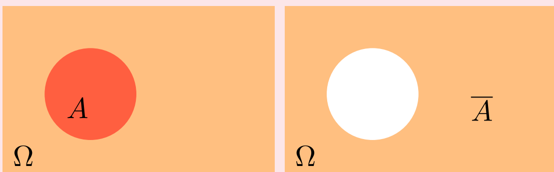
— L'événement $A \cup B$, autrement dit « A ou B », est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A ou à B.



— Deux événements sont dits **incompatibles** ou disjoints si leur intersection est vide.



— On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les résultats possibles n'appartenant pas à A.



— L'événement correspondant à l'ensemble vide est dit **événement impossible**.

— L'événement correspondant à l'univers est dit **événement certain**.

Exemples. On considère un tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes.

— L'univers Ω est l'ensemble formé des 32 cartes.

— « Obtenir un as » est un événement.

— « Obtenir un as de pique » est un événement élémentaire.

— Soient A l'événement : « obtenir un as » et B l'événement : « obtenir un coeur ».

  — L'événement $A \cap B$ correspond à « obtenir un as **et** un coeur ».

  — L'événement $A \cup B$ correspond à « obtenir un as **ou** un coeur ».

— Les deux événements « obtenir un coeur » et « obtenir un trèfle » sont incompatibles.

— Soit R l'événement « obtenir une carte rouge ». $\overline{B}$: « obtenir une carte noire » est l'événement contraire.

— « obtenir un 2 » est événement impossible.
— « obtenir une carte rouge ou noire » est un événement certain.

Exercice 1

Un lycée compte 2000 élèves.
On sait que 35 % des lycéens pratique le cyclisme, que 25 % des lycéens pratiquent le tennis et que 15 % pratiquent les deux sports.
On interroge au hasard un lycéen. On note les évènements suivants :
C :« la personne choisie pratique le cyclisme » ;
T :« la personne choisie pratique le tennis ».

1. Compléter le tableau ci-après :

	C	$\overline{C}$	Total
T	......	......	......
$\overline{T}$	......	......	......
Total	......	......	......

2. Décrire les événements suivants à l'aide des événements C et T, puis calculer leur probabilité.
   E :« La personne pratique au moins un des sports considérés » ;
   F :« La personne ne pratique aucun des sports considérés » ;
   G :« La personne pratique le cyclisme et ne pratique pas le tennis » ;
   H :« La personne pratique un et un seul des sports considérés ».

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.
On considère les événements suivants.

— A : la carte tirée est un as.
— B : la carte tirée est un coeur.

1. Définir par une phrase les événements $\overline{A}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Calculer la probabilité des événements : A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ et $\overline{A}$.

....
....
....
....
....

2.3 Probabilité d'un événement

Propriété

— Pour tout événement A, $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$.
— Si deux événements A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
— Si A et B ne sont pas incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple. On tire au hasard une carte de façon équiprobable dans un jeu de 32 cartes et on note.
⋆ A l'événement « la carte tirée est un as ».
⋆ B l'événement « la carte tirée est un carreau ».
⋆ C l'événement « la carte tirée est une figure (valet, dame, roi) ».

On a alors :

— $p(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$; $p(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$; $p(C) = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$; $p(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.

— $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{4}{32} + \dfrac{8}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$.

— $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = \dfrac{7}{8}$.

— $p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 1

Soit A et B deux événements tels que :
$p(A) = 0,7 \quad p(B) = 0,5 \quad$ et $\quad p(A \cap B) = 0,3$. Calculer les probabilités suivantes :
a) $p(\overline{A})$ **b)** $p(A \cup B)$ **c)** $p(\overline{A} \cap B)$.

....
....
....
....
....

Exercice 2

Soit S et T deux événements tels que :
$p(\overline{S}) = 0,5 \quad p(T) = 0,6 \quad$ et $\quad p(S \cup T) = 0,9$.
Calculer les probabilités suivantes : **a)** $p(S \cap T)$ **b)** $p(\overline{S \cup T})$.

....
....
....
....
....

Exercice 3

On considère des événements A et B incompatibles tels que $p(\overline{A}) = 0,4$ et $p(B) = 0,2$.
Déterminer $p(A \cup B)$.

....
....
....
....
....

Exercice 4

On considère deux événements V et F tels que : $p(V) = 0,4 \quad p(F) = 0,3 \quad$ et $\quad p(V \cup F) = 0,8$.
Sara prétend que ce n'est pas possible. Confirmer ou infirmer sa déclaration.

....
....
....
....
....

Exercice 5

On considère deux événements V et F tels que : $p(V) = 0,6$ et $p(V \cup F) = 0,55$. Maria prétend que ce n'est pas possible. Confirmer ou infirmer sa déclaration.

....
....
....
....

Exercice 6

A et B sont deux événements tels que : $p(A) = 0,8$ et $p(B) = 0,53$.

1. A et B sont-ils incompatibles ?
2. Sachant que $p(A \cup B) = 0,95$ calculer : **a)** $p(A \cap B)$ **b)** $p(A \cap \overline{B})$.

....
....
....
....

Exercice 7

120 élèves de Terminale se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons
Pratiquent un sport	65	23
Ne pratiquent aucun sport	21	11

On choisit un élève au hasard parmi les 120. Calculer la probabilité des événements suivants.

— A : l'élève choisie est une fille pratiquant un sport.
— B : l'élève choisie est une fille.
— C : l'élève choisi est un garçon ne pratiquant aucun sport.

....
....
....
....

Exercice 8

Une urne contient quatre boules numérotées ❶ ❷ ❸ ❹ indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement deux boules, en remettant la première boule tirée dans l'urne.

— A est l'événement : « La somme des points obtenus est égale à 4. »
— B est l'événement : « Le produit des points obtenus est égale à 4. »

a) Représenter la situation par un tableau ou un arbre.
b) Déterminer $p(A)$ et $p(B)$.
c) Définir à l'aide dune phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$.
d) Déterminer $p(A \cap B)$ et en déduire $p(A \cup B)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.4 Probabilités conditionnelles

Définition 2.4

Le nombre d'issues qui réalisent l'évènement A est appelé cardinal de A. Il est noté $Card(A)$.

Définition 2.5

Soient A et B deux évènements tels que $Card(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est la probabilité que l'évènement B soit réalisé sachant que l'évènement A est réalisé. Elle est notée $p_A(B)$:

$$p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}.$$

Exemple. Dans une classe 1G, après la visite médicale, on a dressé le tableau suivant :

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes	Total
Fille	3	15	18
Garçon	7	5	12
Total	10	20	30

Les fiches individuelles de renseignements tombent par terre et s'éparpillent.

On choisit un élève au hasard et on considère les évènements suivants :
A : « l'élève est une fille » et B : « l'élève porte des lunettes ».
Ainsi, $p_A(B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6}$ et $p_B(A) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(B)} = \dfrac{3}{10}$.

Exercice 1

On a placé dans un panier des poivrons jaunes ou rouges, provenant de France ou d'Espagne selon la répartition suivante :

	Jaune	Rouge	Total
France	1	2	3
Espagne	4	5	9
Total	5	7	12

On choisit au hasard un poivron dans le panier. On note :
- F : « le poivron provient de France » ;
- J : « le poivron est jaune ».

1. (a) Calculer les probabilités $p(F)$, $p(J)$ et $p(F \cap J)$.
   (b) En déduire la probabilité $p(F \cup J)$.
2. (a) Déterminer la probabilité $p_J(F)$. Interpréter le résultat.
   (b) On choisit un poivron provenant de France. Quelle est la probabilité qu'il soit jaune ?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

Une boîte de petits fours contient 50 gâteaux, qui sont chocolatés ou meringués. Ces gâteaux sont soit de forme carrée, soit de forme ronde.
La répartition de ces gâteaux dans la boîte est donnée par le tableau ci-dessous.

	Chocolaté	Meringué	Total
Carrée	10	10	20
Ronde	20	10	30
Total	30	20	50

On choisit au hasard un gâteau dans cette boîte. On note :

— M : « le gâteau est meringué » ;

— R : « le gâteau est de forme ronde ».

1. (a) Déterminer la probabilité que le gâteau soit meringué et de forme carrée.
   (b) Calculer $p(\overline{M} \cap R)$. Interpréter le résultat.
   (c) En déduire $p(\overline{M} \cup R)$.
2. (a) Calculer la probabilité que le gâteau soit de forme ronde sachant qu'il est meringué.
   (b) Calculer la probabilité que le gâteau soit meringué sachant qu'il est de forme carrée.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exercice 3

Une maladie atteint 3 % d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test :
• parmi les bien-portant, 2 % ont un test positif ;
• parmi les individus malades, 49 ont un test négatif.

1. Compléter le tableau suivant :

	Malade	Bien-portant	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			

2. On choit au hasard un individu de cette population. On note :
   — T : « le test est positif » ;
   — M : « l'individu est malade ».
   (a) Définir par une phrase l'évènement $T \cap M$, puis calculer sa probabilité.
   (b) Calculer la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade.
   (c) Calculer la probabilité que l'individu soit malade sachant que le test est positif.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2.5 Arbre de probabilité

Exemple. Tirages successifs avec remise

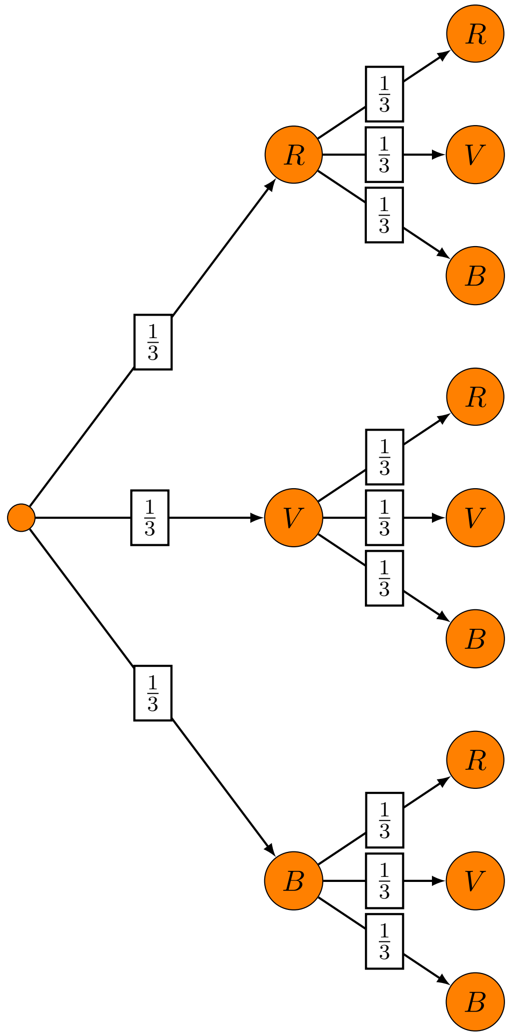
Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.

On tire au hasard un premier jeton que l'on remet dans la boite avant de tirer un deuxième jeton.

Le nombre des issues possibles est égal à 9.

— p (« obtenir deux jetons rouges ») $= \dfrac{1}{9}$.

— p (« obtenir au moins un jeton rouge ») $= \dfrac{5}{9}$.



Exercice 1

On lance 3 fois de suite une pièce. Calculer la probabilité des événements suivants.

— A : obtenir exactement une fois pile.

— B : obtenir au moins une fois pile.

— C : obtenir au plus une fois pile.

....
....
....
....
....
....
....

....

Exercice 2

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On suppose qu'ils auront autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer la liste de tous les résultats possibles.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - A : le couple aura 3 filles.
   - B : le couple aura 3 filles ou 3 garçons.
   - C : le couple aura au moins une fille.

....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3

On s'intéresse à la clientèle d'un musée. Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.

Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

- 70% des clients achètent leur billet sur internet ;
- parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35% choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55% choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les événements suivants :

- A : « Le client choisit une visite avec un audioguide » ;
- B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer les probabilités suivantes : $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(B \cap \overline{A})$ et $P(\overline{B} \cap \overline{A})$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 4

Dans une population, les individus sont répartis en 4 groupes sanguins : A, B, AB et O et à l'intérieur de chaque groupe en Rhésus + ou selon le tableau suivant en pourcentages :

groupe	**A**	**B**	**AB**	**O**
Rhésus +	38	8	3	36
Rhésus -	7	1	1	6

Un individu est choisi au hasard. Calculer la probabilité :

1. qu'il soit du groupe O sachant qu'il a un rhésus -.
2. qu'il ait un rhésus - sachant qu'il est du groupe O.

Exercice 5

La bibliothèque d'un lycée comporte 150 romans policiers et 50 romans de science-fiction.
On sait que 40% des romans policiers sont français et que 70% des romans de science-fiction sont français.
Jacques choisit au hasard un ouvrage parmi les 200 livres de la bibliothèque.

1. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un roman policier ?
2. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un roman policier français ?
3. Montrer que la probabilité qu'il choisisse un ouvrage d'un auteur français est 0,475.
4. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un roman policier sachant que l'auteur est français ?

3 Statistiques

3.1 Vocabulaire

- **Population** : c'est l'ensemble étudié.
- **Individu** : c'est un élément de la population.
- **Effectif total** : c'est le nombre total d'individus.
- **Caractère** : c'est la propriété étudiée.
  Il y a deux sortes de caractères :
  - les caractères quantitatifs que l'on peut mesurer avec des nombres.
    On distingue les caractères quantitatifs **discrets** qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (notes à un devoir...) et les caractères quantitatifs **continus** dont on regroupe les valeurs par intervalles (taille, durée d'écoute...).
  - les caractères qualitatifs (profession, marque de voiture ...).

Exemple. On considère l'exemple suivant (qui servira pour les prochains paragraphes) : les 17 élèves d'une classe sont séparés en deux groupes.

- Les notes obtenues à un devoir par le **groupe A** sont : 4 ; 4 ; 9 ; 9 ; 9 ; 15 ; 15 ; 17 ; 17
- Les notes obtenues à un devoir par le **groupe B** sont : 6 ; 6 ; 8 ; 8 ; 10 ; 10 ; 12 ; 12
- La population étudiée est l'ensemble ....
- Le caractère étudié est la ....
- L'effectif total est égal à ....

3.2 Fréquence

Exemple. Voici les notes obtenues à un contrôle sur 10 par une classe de première :

0 – 1 – 1 – 2 – 2 – 2 – 2 – 3 – 3 – 4 – 5 – 5 – 7 – 7 – 7– 8 – 8 – 10 – 10 – 10.
Compléter le tableau ci-dessous :

Note	0	1	2	3	4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Effectifs	1	2	4	2					
Effectifs cumulés	1	3	7	9					
Fréquences (en%)	5%	10%	20%	10%					
Fréquences cumulées (en%)	5%	15%	35%	45%					

3.3 Moyenne

On donne la série de nombres suivants :

32, 6, 18, 29, 6, 48, 50, 12, 32, 4, 50, 10, 29, 72, 32,16 ,16 , 6, 50, 50, 4, 18, 6, 10, 29, 12, 48, 6, 32, 50

Moyenne arithmétique simple

La **moyenne arithmétique simple** est égale à :

$$\frac{32+6+18+19+\cdots+6+32+50}{30} = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

On peut aussi regrouper les nombres de l'exemple précédent dans le tableau suivant :

Nombre	4	6	10	12	16	18	29	32	48	50	72
Effectif	2	5	2	2	2	2	3	4	2	5	1
Effectif cumulé	2	7	9	11	13	15	18	22	24	29	30

Moyenne arithmétique pondérée

La **moyenne arithmétique pondérée** est égale à :

$$\frac{4\times 2+6\times 5+10\times 2+\cdots+50\times 5+72\times 1}{30} = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Définition 3.1

On appelle moyenne de la série

valeur	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
effectif	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

, le réel $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N}$

(N représente l'effectif total et k est le nombre de valeurs prises par le caractère).

Propriété 3.2

— Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre a, la moyenne de cette série est aussi multipliée ou divisée par a.

— Si une population d'effectif N est composée d'une partie d'effectif N_A et de moyenne $\overline{x_A}$ et d'une autre partie d'effectif N_B et de moyenne $\overline{x_B}$, alors la moyenne de la population totale est telle que : $\overline{x} = \dfrac{N_A\overline{x_A} + N_B\overline{x_B}}{N}$.

Exemple. — Pour la série du groupe A

valeur	4	9	15	17
effectif	2	3	2	2

, la moyenne est

$$\overline{x_A} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 9 + 2 \times 15 + 2 \times 17}{9} = 11$$

— Pour la série du groupe B

valeur	6	8	10	12
effectif	2	2	2	2

, la moyenne est

$$\overline{x_B} = \frac{2 \times 6 + 2 \times 8 + 2 \times 10 + 2 \times 12}{8} = 9$$

La moyenne du groupe A, composée de $N_A = \cdots$ élèves, était $\overline{x_A} = \cdots$ et la moyenne du groupe B, composée de $N_B = \cdots$ élèves, était $\overline{x_B} = \cdots$. On peut en déduire que la moyenne globale de la classe est $\overline{x} = \dfrac{N_A\overline{x_A} + N_B\overline{x_B}}{N} = \dfrac{\cdots\cdots\cdots + \cdots\cdots\cdots}{\cdots} \approx 10,06$.

3.4 Médiane

Définition 3.3

La médiane d'une série statistique est la valeur qui partage le groupe étudié en deux sous groupe de même effectif chacun tels que :

★ tous les éléments du premier sous-groupe soient inférieurs ou égales à la médiane ;

★ tous les éléments du deuxième sous-groupe soient supérieurs ou égales à la médiane.

Exemples. Il y a deux cas.

1. Cas d'un nombre impair de valeurs dans une série : 1 ; 5 ; 7 ; 10 ; 11 ; 50 ; 55.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Cas d'un nombre pair de valeurs dans une série : 10 ; 20 ; 30 ; 35 ; 37 ; 40 ; 50 ; 60.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 1

Un professeur de SVT demande aux 29 élèves d'une classe de sixième de faire germer des graines de blé chez eux. Le professeur donne un protocole expérimental à suivre :

- mettre en culture sur du coton dans une boîte placée dans une pièce éclairée, de température entre 20 °et 25 °C ;
- arroser une fois par jour ;
- il est possible de couvrir les graines avec un film transparent pour éviter l'évaporation de l'eau.

Exercice 1 (suite)

Le tableau ci-dessous donne les tailles des plantules (petites plantes) des 29 élèves à 10 jours après la mise en germination.

Taille en cm	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	1	2	2	4	2	2	3	3	4	4	2
Effectifs cumulés											

1. Combien de plantules ont une taille qui mesure au plus 12 cm ?
   ....
   ....
2. Calculer la moyenne de cette série. Arrondir au dixième près.
   ....
   ....
   ....
3. Déterminer la médiane de cette série et interpréter le résultat.
   ....
   ....
   ....
4. On considère qu'un élève a bien respecté le protocole si la taille de la plantule à 10 jours est supérieure ou égale à 14 cm. Quel pourcentage des élèves de la classe a bien respecté le protocole ?
   ....
   ....
   ....
5. Le professeur a fait lui-même la même expérience en suivant le même protocole. Il a relevé la taille obtenue à 10 jours de germination. Prouver que, si on ajoute la donnée du professeur à cette série, la médiane ne changera pas.
   ....
   ....
   ....

Exercice 2

On considère la série statistique donnant le SMIC horaire brut en euros de 2001 à 2011 (source : INSEE).

Année	SMIC
2011	9,40
2010	9,00
2009	8,82
2008	8,63
2007	8,44
2006	8,27
2005	8,03
2004	7,61
2003	7,19
2002	6,83
2001	6,67

1. Quelle est la médiane ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Paul remarque qu'entre 2001 et 2002, l'augmentation du SMIC horaire brut est de 16 centimes alors qu'entre 2007 et 2008, elle est de 19 centimes.
   Il affirme que « le pourcentage d'augmentation entre 2007 et 2008 est supérieur à celui pratiqué entre 2001 et 2002 ». A-t-il raison ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3.5 Quartiles et écart interquartile d'une série statistique

Définition 3.4

On détermine les quartiles, en écrivant les valeurs du caractère par ordre croissant de telle façon que chaque valeur apparaisse un nombre de fois égal à son effectif, et en partageant la liste en deux sous-séries de même effectif, si l'effectif total est impair, on ne tient pas compte de la médiane.

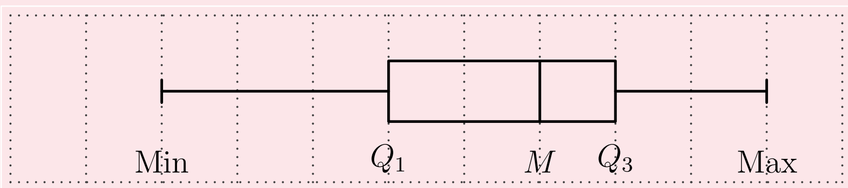
- le premier quartile Q_1 est la médiane de la sous-série inférieure ;
- le troisième quartile Q_3 est la médiane de la sous-série supérieure ;
- l'écart interquartile est défini par $Q_3 - Q_1$ et sert à mesurer la dispersion des valeurs.

Exemples. Il y a deux cas.

- Groupe A :
  - Détermination de la médiane : $4\ ;\ 4\ ;\ 9\ ;\ 9\ ;\ \overline{9}\ ;\ 15\ ;\ 15\ ;\ 17\ ;\ 17$
    La médiane est $M = 9$, valeur située au milieu, car l'effectif total est impair.
  - Détermination de Q_1 et Q_3 : on partage la liste en deux sous-séries de même effectif, on ne tient pas compte de la médiane car l'effectif total est impair :
    $\underbrace{4\ ;\ \underline{4}\ ;\ \underline{9}\ ;\ 9}\ ;\ 9\ ;\ \underbrace{15\ ;\ \underline{15}\ ;\ \underline{17}\ ;\ 17}$
    Les effectifs des deux sous-séries étant pairs, Q_1 est la demi-somme de la sous-série inférieure et Q_3 est la demi-somme de la sous-série supérieure :
    $Q_1 = \dfrac{\cdots + \cdots}{2} = 6,5$; $Q_3 = \dfrac{\cdots + \cdots}{2} = 16$
    L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = \cdots - \cdots = 9,5$
- Groupe B :
  - Détermination de la médiane : $6\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ \overline{8}\ ;\ \overline{10}\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 12$
    La médiane est $M = \dfrac{\cdots + \cdots}{2} = 9$, la demi-somme des deux valeurs situées au milieu, car l'effectif total est pair.
  - Détermination de Q_1 et Q_3 : on partage la liste en deux sous-séries de même effectif :
    $\underbrace{6\ ;\ \underline{6}\ ;\ \underline{8}\ ;\ 8}\ ;\ \underbrace{10\ ;\ \underline{10}\ ;\ \underline{12}\ ;\ 12}$
    Les effectifs des deux sous-séries étant pairs, Q_1 est la demi-somme de la sous-série inférieure et Q_3 est la demi-somme de la sous-série supérieure :
    $Q_1 = \dfrac{\cdots + \cdots}{2} = 7$; $Q_3 = \dfrac{\cdots + \cdots}{2} = 11$
    L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = \cdots - \cdots = 4$

Définition 3.5

Le diagramme en boîtes d'une série statistique se construit de la façon suivante :

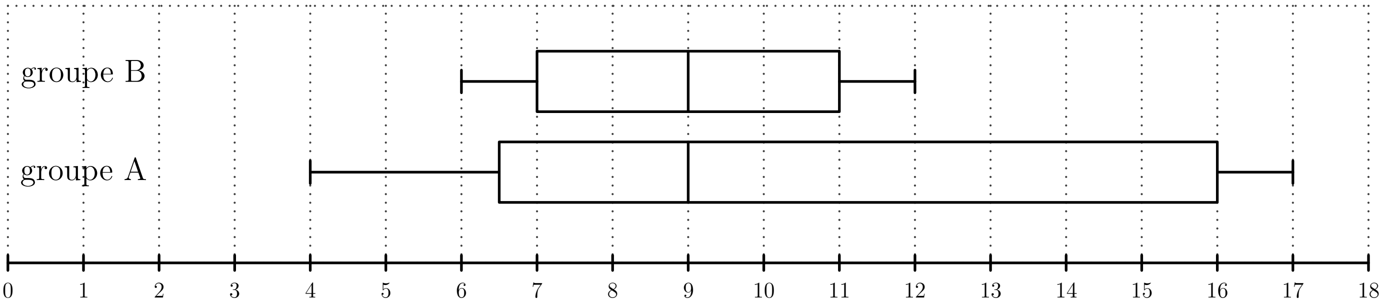


- 25% des valeurs du caractère sont comprises entre Min et Q_1 ;
- 25% des valeurs du caractère sont comprises entre Q_1 et M ;
- 25% des valeurs du caractère sont comprises entre M et Q_3 ;
- 25% des valeurs du caractère sont comprises entre Q_3 et Max.

Exemples. On reprend des données des exemples précédents.

- Pour le groupe A, on a $Min = \cdots$; $Q_1 = \cdots$; $M = \cdots$; $Q_3 = \cdots$; $Max = \cdots$.
- Pour le groupe B, on a $Min = \cdots$; $Q_1 = \cdots$; $M = \cdots$; $Q_3 = \cdots$; $Max = \cdots$

Les diagrammes en boîtes des deux groupes donnent,



Exercice 1

On considère la série

valeur	25	32	57	75
effectif	3	4	1	2

1. Calculer la moyenne de cette série.
   ....
   ....
2. Si on multiplie toutes les valeurs du caractère par 5, quelle est la nouvelle moyenne que l'on obtient ?
   ....

Exercice 2

Dans une classe, il y a 20 filles et 15 garçons. La taille moyenne de l'ensemble des élèves est de 1,7 m ; la taille moyenne des garçons est de 1,8 m. Quelle est la taille moyenne des filles de la classe ?

....
....
....
....
....

Exercice 3

1. On considère la série suivante (les valeurs du caractère sont écrites les unes à la suite des autres dans l'ordre croissant)

   1 ; 1 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 7 ; 8 ; 8 ; 10 ; 11

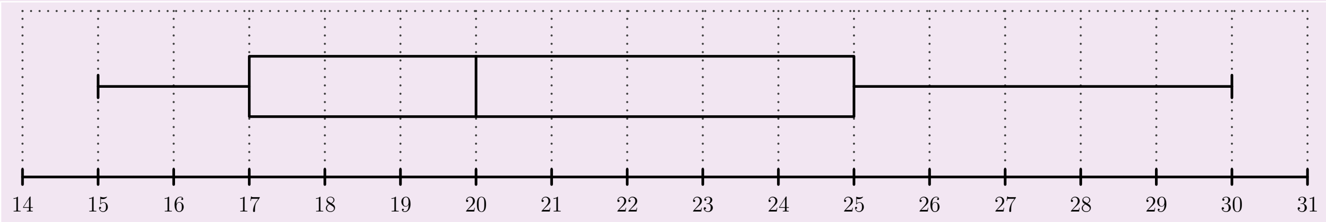
   Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série :
   ....
   ....
   ....
   ....
2. On considère la série suivante (les valeurs du caractère sont écrites les unes à la suite des autres dans l'ordre croissant)

   12 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16 ; 18 ; 18 ; 21 ; 22 ; 22

   Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série :
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 4

Le diagramme en boîte ci-dessous représente la répartition du nombre de BD vendues par jour dans une librairie.



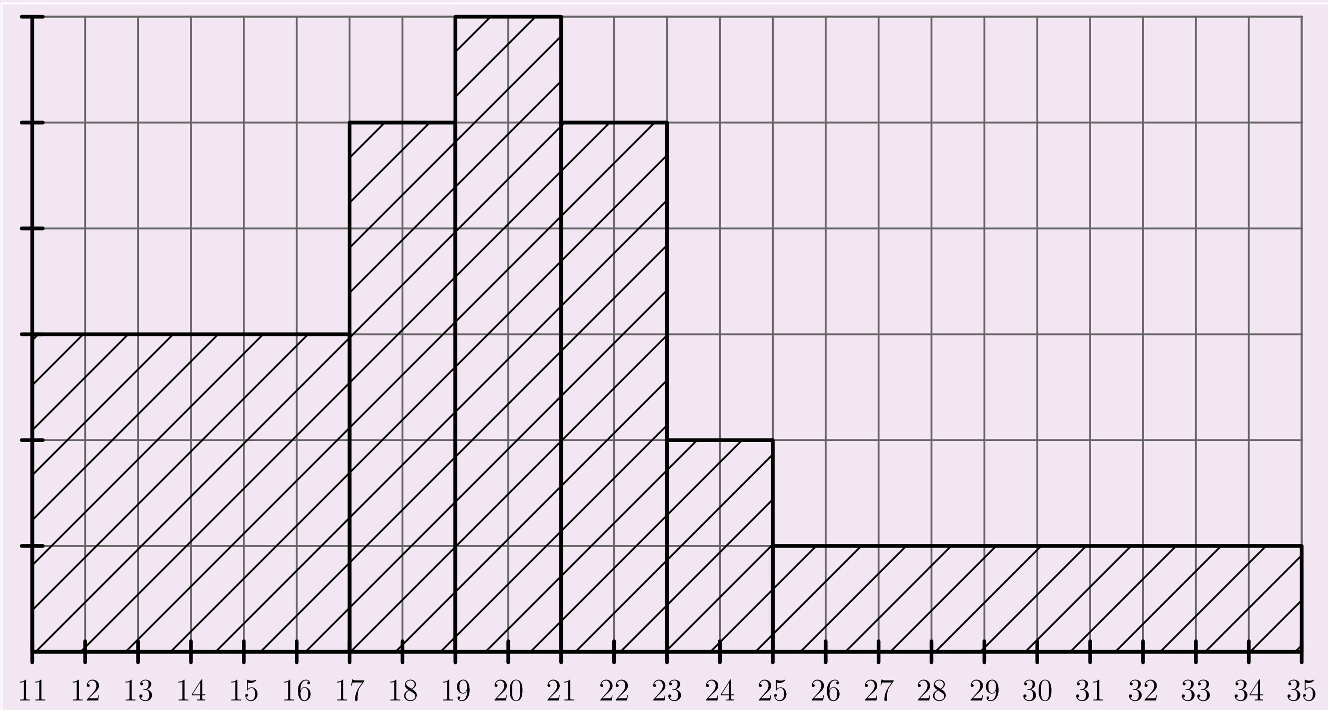
Déterminer :

1. le nombre médian de BD vendues par jour. ....
2. le pourcentage de jours où le nombre de BD vendues est compris entre 17 et 25. ....
3. le pourcentage de jours où le nombre de BD vendues est inférieur ou égal à 25 ....

Exercice 5

Dans l'histogramme ci-dessous, l'effectif correspondant à l'intervalle $[23, 25[$ est égal à 10. En déduire l'effectif correspondant aux autres intervalles grâce au tableau suivant :

valeur	[11 ; 17[	[17 ; 19[	[19 ; 21[	[21 ; 23[	[23 ; 25[	[25 ; 35[
aire						
effectif					10	



Exercice 6

On considère la série suivante :

valeur	$[2; 8[$	$[8; 10[$	$[10; 12[$	$[12; 20[$
effectif	12	6	8	16

1. Calculer la moyenne de cette série en s'aidant du tableau suivant :

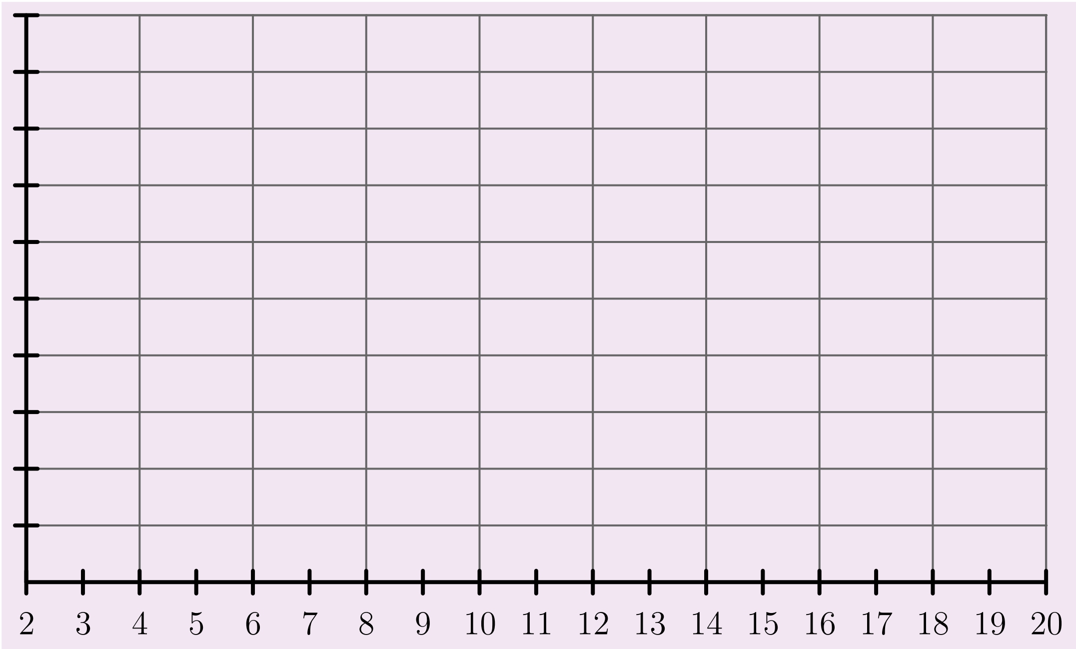
milieu				
effectif	12	6	8	16

....

Exercice 6 (suite)

2. Construire le diagramme en bâtons dans la figure ci-dessous en s'aidant du tableau suivant :

valeur	$[2;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$[12;20[$
aire (1 carreau pour 1 individu)	12	6	8	16
largeur				
hauteur				



3.6 Écart-type d'une série statistique

Définition 3.6

— **La variance** V d'une série statistique d'effectif total N est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne : $V = \dfrac{n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+n_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2}{N}$.

— **L'écart-type** σ d'une série statistique est la racine carrée de la variance : $\sigma=\sqrt{V}$.
Il sert à mesurer la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.

Exemples. On reprend les mêmes données des exemples précédents.

— Dans le groupe A, la moyenne était de 11. Donc,

Valeur	4	9	15	17
Écart à la moyenne	-7	$\cdots$	4	$\cdots$
Carré de l'écart	$\cdots$	4	16	$\cdots$
Effectif	2	3	2	2

Variance $V_A=\dfrac{2\times 49+3\times 4+2\times 16+2\times 36}{9}\approx 23,8$.
Écart-type $\sigma_A\approx\sqrt{23,8}\approx 4,9$.

— Dans le groupe B, la moyenne était de 9. Donc,

Valeur	6	8	10	12
Écart à la moyenne	-3	$\cdots$	1	3
Carré de l'écart	$\cdots$	1	1	$\cdots$
Effectif	2	2	2	2

Variance $V_B=\dfrac{2\times 9+2\times 1+2\times 1+2\times 9}{8}=5$.
Écart-type $\sigma_B=\sqrt{5}\approx 2,2$.

Exercice 1

Calculer la moyenne et l'écart-type de la série suivante :

Valeur	1	5	13	17
Effectif	2	1	3	2

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

On considère la série suivante :

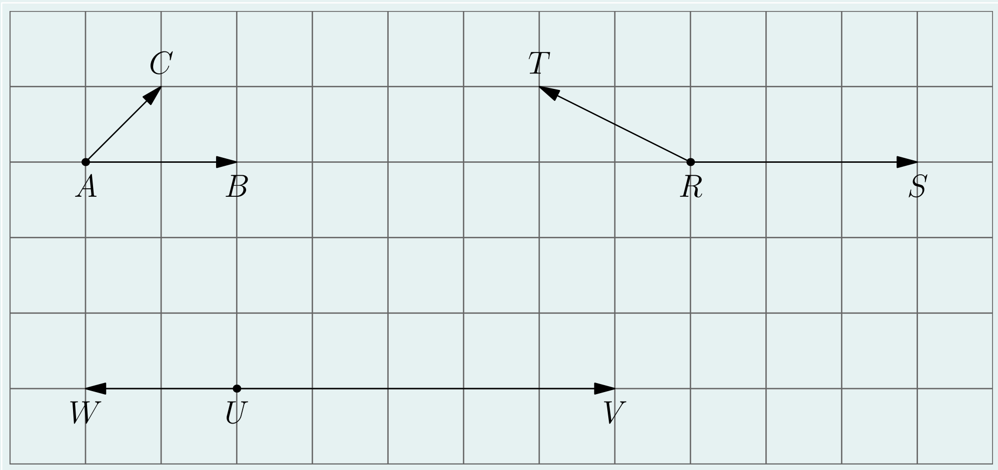
Classe	$[2;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$[12;20[$
Effectif	x	6	8	16

1. Déterminer la valeur qu'il faut donner à x pour que la moyenne de la série soit égale à 9.
   ....
   ....
   ....

2. Calculer alors l'écart-type de la série.
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 3

Le diagramme en boîtes d'une série est le suivant :



1. Déterminer la médiane, l'écart interquartile et les valeurs extrêmes de la série.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Quelle est la proportion de valeurs du caractère supérieures à 40 ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

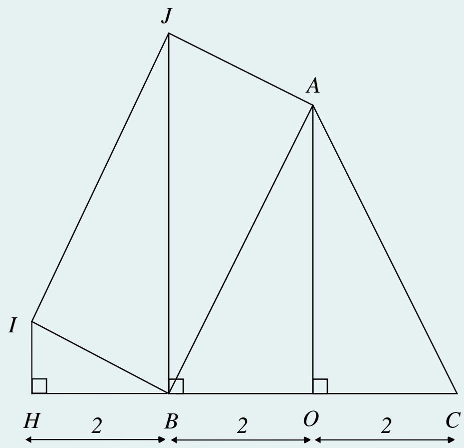
Exercice 4

On considère la série suivante.

Valeur	5	8	10	12	15
Effectif	2	1	4	3	2

1. Déterminer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de la série.
....
....
....
....
....

2. Construire ci-dessous le diagramme en boîtes de la série :



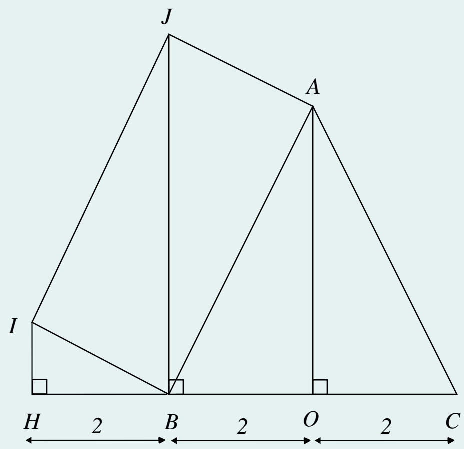
Exercice 5

On considère la série suivante.

Valeur	2	8	12	14	19
Effectif	2	1	4	2	1

1. Déterminer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de la série.
....
....
....
....
....

2. Construire ci-dessous le diagramme en boîtes de la série :



Exercice 6

Les séries suivantes donnent les précipitations moyennes mensuelles en millimètres à Nice et à Paris.

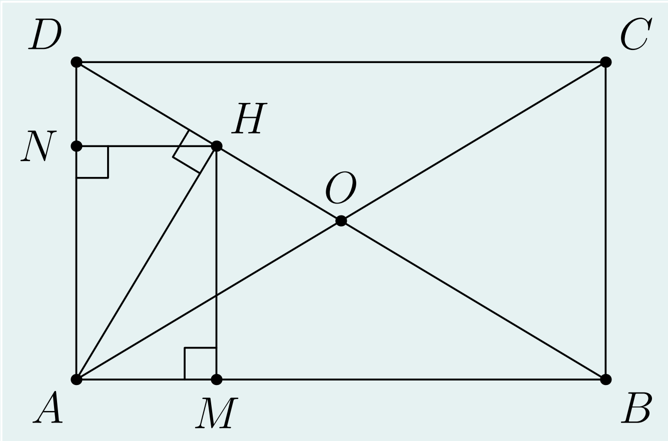
	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Nice	67	83	70	70	42	37	20	38	83	109	160	97
Paris	55	48	40	45	55	60	56	65	60	52	60	52

1. Ordonner les valeurs pour les deux villes dans l'ordre croissant.
   En déduire la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de chaque série.
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 6 (suite)

....
....
....
....

2. Construire les diagrammes en boîtes des deux séries dans le même repère ci-dessous.



3. Dans quelle ville la pluviométrie est-elle la plus régulière ?
   ....
   ....
   ....

Exercice 7

Une société de maintenance a en charge l'entretien de 439 machines du même type. Pendant une année, elle a noté le nombre d'interventions réalisé sur chacune de ces machines. Les données sont regroupées dans le tableau suivant.

Nombre d'interventions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de machines concernées	10	12	17	44	78	94	83	49	36	16

1. Calculer le nombre moyen d'interventions $\bar{x}$.
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Le gérant de la société considère qu'il faudrait renouveler le parc de machines si moins de $2/3$ des valeurs de la série sont comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma\,;\,\bar{x} + \sigma]$.
   Sachant que $\sigma \approx 1,97$, que va décider le gérant ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4 Généralités sur les fonctions

4.1 Vocabulaire

Définition

Une fonction est un procédé qui a un nombre x associe un (unique) nombre que l'on note $f(x)$.

$$x \longrightarrow \boxed{\text{machine ou processus } f} \longrightarrow f(x).$$

- On note : $f : x \to f(x)$ (La fonction f qui à x associe $f(x)$).
- Si y est l'image de x par la fonction f (c'est-à-dire si $y = f(x)$) alors on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.
- L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x tels $f(x)$ existe.
- Un réel dont l'image ne peut pas être calculée par f est appelée valeur interdite de f.

Exemples. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble de définition de la fonction f.
- $\cdots$ est l'image de 0 par f. En effet, ...
- 2 et -2 sont les deux antécédents de 13 par f. En effet, ...
  ....

Exercice 1

Compléter le tableau suivant :

En français	En mathématiques
L'image de 2 est 3	$f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$
1 est l'image de 8	$f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$
5 est l'antécédent de 4	$f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$
13 a pour antécédent -7	$f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$

Exercice 2

On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = -7x + 9$. Calculer : $k(10)$, $k(-4)$, $k(\frac{3}{7})$ et $k(\frac{1}{4})$.

....
....
....
....

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 7x$. Calculer les images de 0 ; 2 ; -3 et $\frac{1}{2}$.

....
....
....
....

Exercice 4

On définit deux fonctions k et l, définies sur $\mathbb{R}$, par : $k(x) = 2x + 3$ et $l(x) = x^2$.

1. Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction k.
   ....
   ....
2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par la fonction l.
   ....
   ....

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^3 - 5x$. Calculer les images de 0 ; 2 ; -3 et $\frac{1}{2}$. ....
....
....
....
....
....

Exercice 6

Le kilogramme de pommes coûte 1,50 €. On considère la fonction f qui à une masse de pommes associe son prix.

- Donner une expression de f.
  ....
- Quelle est la nature de cette fonction ?
  ....
- Calculer l'image de 10 par la fonction f et interpréter le résultat par rapport à la situation.
  ....
  ....
- Déterminer l'antécédent de 4,5 par la fonction f et interpréter le résultat obtenu.
  ....
  ....

Exercice 7

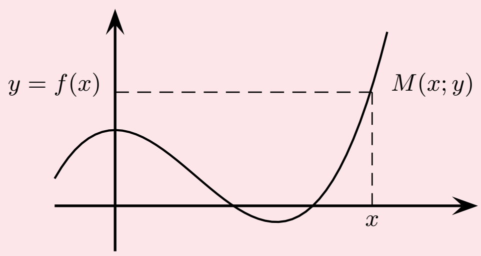
Dans un club de gym, deux formules sont proposées :
Formule A : abonnement mensuel de 18 € et 5 € par séance ;
Formule B : abonnement mensuel de 28 € et $3,75$ € par séance.
Soit x le nombre de séances mensuelles d'un abonné.

1. Exprimer, en fonction de x, $f(x)$ le prix payé avec la formule A, puis $g(x)$ le prix payé avec la formule B.
   ....
2. Quelle formule est la plus avantageuse lorsqu'un abonné choisit 6 séances mensuelles ?
   ....
3. Un abonné dispose de 118 €. Quelle formule peut-on lui conseiller ?
   ....
   ....
4. Déterminer le nombre minimal de séances mensuelles pour que la formule B soit la plus avantageuse.
   ....
   ....

4.2 Représentation graphique

Définition

La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$, où x appartient à l'ensemble de définition de f.



$$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \quad \text{si et seulement si} \quad y = f(x).$$

Exemple. Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x - 1$.
Un point $M(x;y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ ....
.... $\mathcal{C}_f$ est ....
....

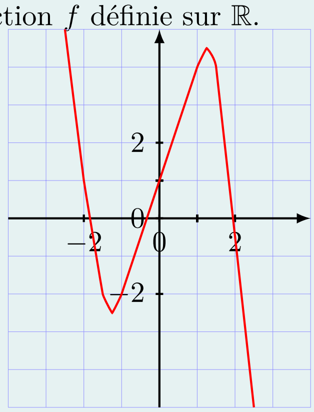
Exercice 1

Pour son anniversaire, Julien a reçu un coffret de tir à l'arc. Il tire une flèche. La trajectoire de la pointe de cette flèche est représentée ci-dessous. La courbe donne la hauteur en mètres (m) en fonction de la distance horizontale en mètres (m) parcourue par la flèche.

1. Dans cette partie, les réponses seront données grâce à des **lectures graphiques**. Aucune justification n'est attendue sur la copie.
   (a) De quelle hauteur la flèche est-elle tirée ? ....
   (b) À quelle distance de Julien la flèche retombe-t-elle au sol ? ....
   (c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la flèche ? ....
2. Dans cette partie, les réponses seront justifiées par des **calculs** :
   La courbe ci-dessus représente la fonction f définie par $f(x) = -0,1x^2 + 0,9x + 1$.
   (a) Calculer $f(5)$. ....
   (b) La flèche s' élève-t-elle à plus de 3 m de hauteur ? ....
   ....
   . ...

Exercice 2

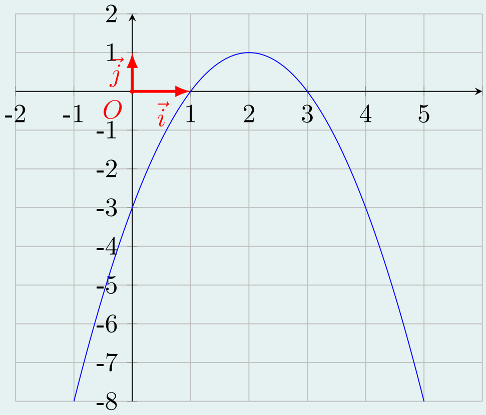
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) l'image de -1 par f ; ....
   (b) $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$; ....
   (c) le(s) antécédent(s) de 1 par f ; ....
   (d) les éventuels nombres qui ont 0 pour image. ....
2. Citer, si possible, un nombre qui a :
   (a) aucun antécédent ; ....
   (b) 2 antécédents ; ....
   (c) 1 antécédent ; ....
   (d) 3 antécédents. ....

Exercice 3

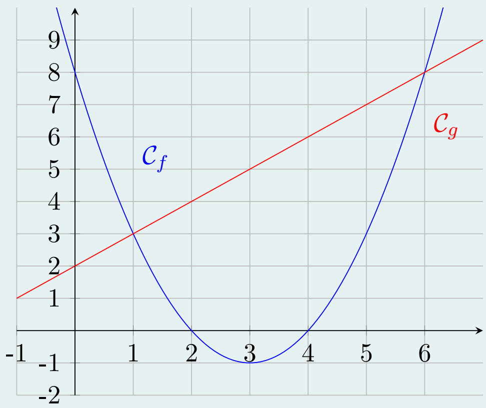
Soit f la fonction définie sur $[-1;5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
   ....
2. Déterminer graphiquement les antécédents de -3 par f.
   ....
3. Dans quel intervalle varie $f(x)$ quand x varie dans $[-1;5]$?
   ....

Exercice 4

On donne les représentations graphiques de deux fonctions f et g.

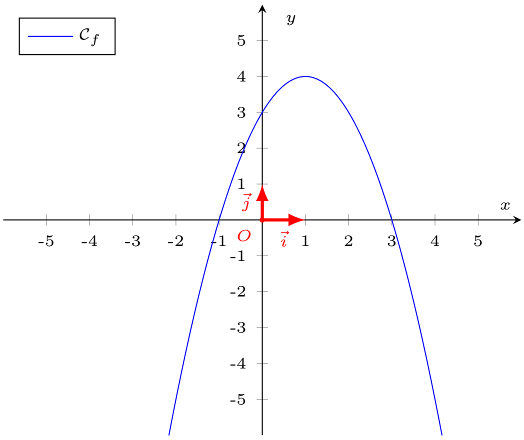


1. Répondre aux questions en utilisant le graphique.
   (a) Sur quel intervalle sont définies ces deux fonctions ?
   ....
   ....
   (b) Donner $f(0)$, $f(5)$ et $g(3)$. ....
   (c) Résoudre $f(x) = 3$.. ....
   (d) Résoudre $f(x) \geqslant 8$.. ....
   (e) Résoudre $f(x) = g(x)$.. ....
   (f) Résoudre $f(x) > g(x)$.. ....
   (g) Donner le minimum de f. En quelle valeur est-il atteint ?
2. Dresser les tableaux de signes et de variations de la fonction f sur son ensemble de définition. ......
   ....
   ....
   ....
   ....

4.3 Variations d'une fonction

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est croissante, ceux sur lesquels elle est décroissante ou ceux sur lesquels elle est constante. On résume en général ces résultats dans un tableau de variation.

Exemple. Soit la fonction f définie sur $[-3;4]$ par l'expression $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
À l'aide d'une calculatrice, on peut tracer l'allure **approximative** de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.



Le tableau de variation est un schéma de la courbe, ne montrant que les variations.

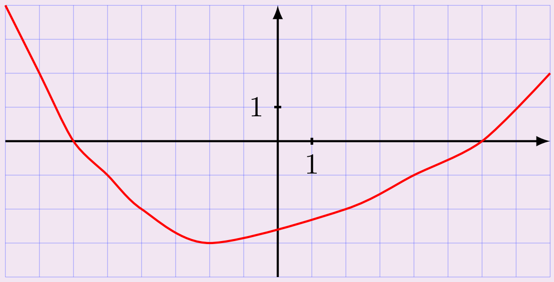
x	-3		1		4
			$\dots$		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$\dots$				$\dots$

On indique les valeurs extrêmes $f(-3)$ et $f(4)$ ainsi que la valeur du maximum $f(1) = 4$.

Exercice 1

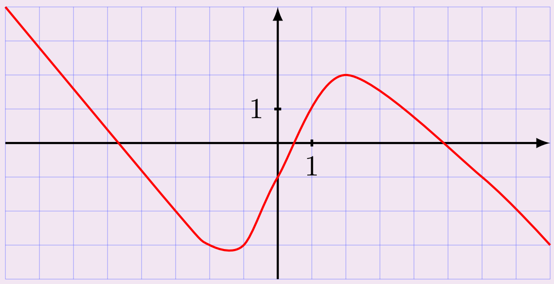
1. Compléter le tableau de variations proposé à partir de représentation graphique ci-dessous.

x	-8	8
$f(x)$		



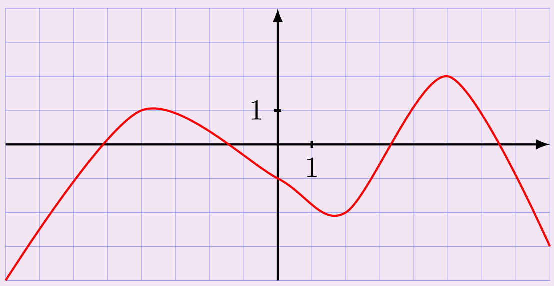
2. Même consigne que la question précédente.

x	-8	8
$f(x)$		



3. Même consigne que la question précédente.

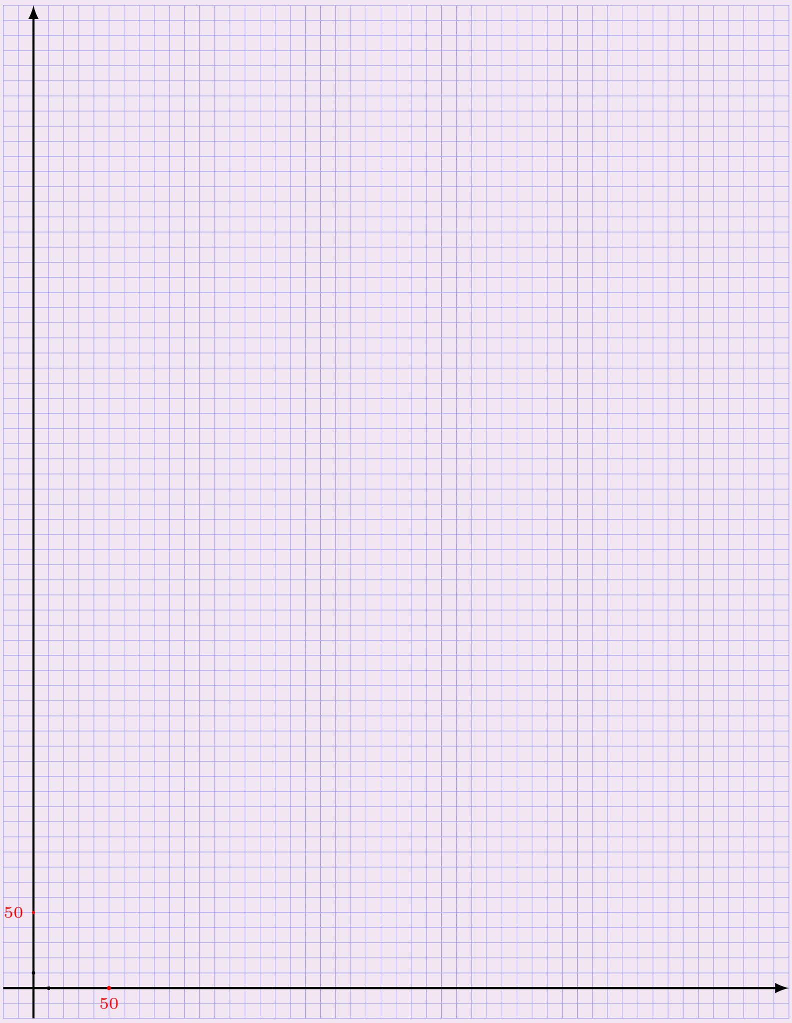
x	-8	8
$f(x)$		



Exercice 2

Une entreprise produit et vend des stylos.
Pour l'entreprise, la production quotidienne de stylos engendre un coût total, noté $C(x)$ composé de coûts fixes (salaires et matériaux) et d'un coût variable proportionnel au nombre x de stylos vendus.
Chaque stylo est vendu 2,50 euros. La recette correspondante est notée $R(x)$.
Le bénéfice, noté $B(x)$ est la différence entre la recette et le coût total.

1. Donner l'expression de la recette en fonction de x.
   ....
2. (a) Le coût total est donné par la formule : $C(x) = 1,25x + 180$. Quel est le coût fixe ?
   ....
   (b) Exprimer le bénéfice en fonction de x.
   ....
3. Calculer R(200), C(200) et B(200). Commenter.
   ....
   ....
4. Combien de stylos doit fabriquer l'entreprise pour le coût total s'élève à 600 euros ?
   ....
   ....
   ....
5. Représenter les fonctions C et R dans le repère ci-dessous.



6. Déterminer par lecture graphique le nombre minimum de stylos à produire et vendre pour que l'entreprise commence à faire des bénéfices. Retrouver ce nombre par le calcul.
   ....
   ....
   ....

4.4 Fonction affine

Définition

Une fonction affine est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

Propriété

La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = mx + p$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y = f(x)$, soit $y = mx + p$, c'est-à-dire la droite (d) d'équation $y = mx + p$.

Définition

- Le nombre m est appelé coefficient directeur de la droite (d).
- Le nombre p est appelé ordonnée à l'origine de la droite (d).

Remarque. — Si $p = 0$, ...

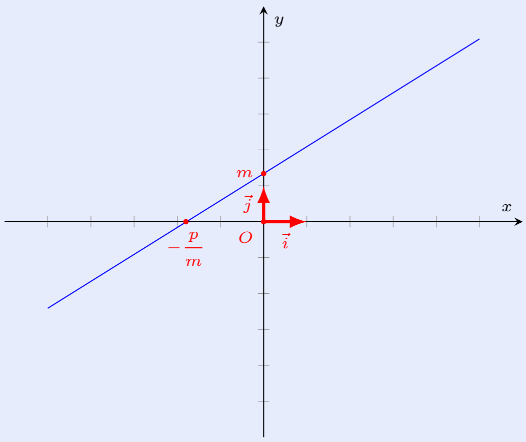
— Si $m = 0$, ...

Propriété

Soit m et p deux nombres réels avec $m \neq 0$.

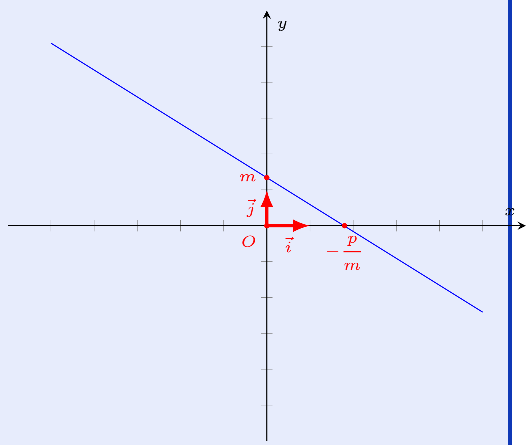
La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ s'annule et change de signe en $x = \dfrac{-p}{m}$.

Si $m > 0$, f est croissante.



x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $m < 0$, f est décroissante.



x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemples. Observer les deux premiers exemples et faire la même chose pour les deux derniers.

- Signe de $f(x) = 4x - 8$.
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$.
  Le coefficient directeur 4 est positif, donc f est croissante et le « + » est mis après le « 0 ».

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Signe de $g(x) = 9 - 3x$.
  $g(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 3x = 0 \Leftrightarrow 9 = 3x \Leftrightarrow x = 3$.
  Le coefficient directeur -3 est négatif, donc g est décroissante et le « + » est mis avant le « 0 »

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

— Signe de $h(x) = 2x - 1$.

— Signe de $k(x) = -2x + 3$.

Exercice 1

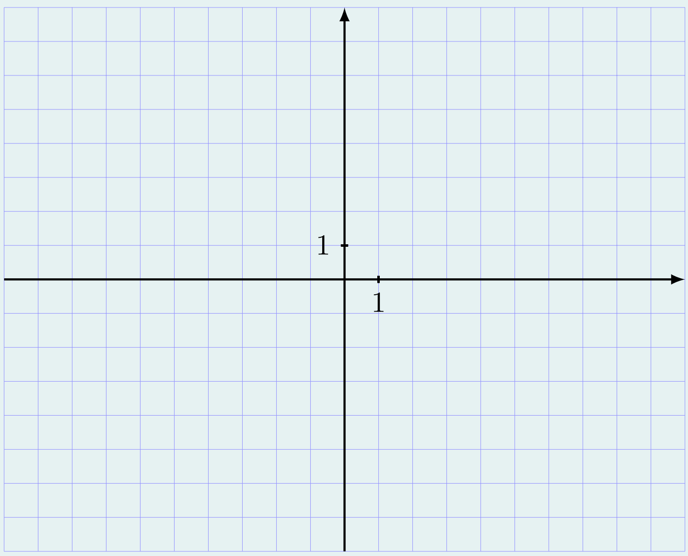
Représenter graphiquement les fonctions définies par :

$f_1(x) = x + 1$ $\qquad$ $f_3(x) = -3$

$f_2(x) = -2x + 4$ $\qquad$ $f_4(x) = 3x$.

Tableau de valeurs :

x	0	1
$f_1(x)$		
$f_2(x)$		
$f_3(x)$		
$f_4(x)$		



Exercice 2

Dresser les tableaux de variations des fonctions définies par :

a) $f(x) = 0,1x + 4$ sur $[0; 10]$;

. . . .

. . . .

. . . .

b) $g(x) = 4 - 2x$ sur $[2; 5]$;

. . . .

. . . .

. . . .

c) $h(x) = -0,8x + 0,4$ sur $[1; 5]$.

. . . .

. . . .

. . . .

Dresser les tableaux de signes des fonctions définies par :

a) $f(x) = 0,1x + 2$ sur $[-100; 100]$;

. . . .

. . . .

. . . .

b) $g(x) = 4 - 2x$ sur $[-1; 10]$;

. . . .

. . . .

. . . .

c) $h(x) = -0,4x + 0,4$ sur $[0; 100]$.

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 3

Boulétos achète des ingrédients pour faire des crêpes. Il dépense 8 euros, fait 30 crêpes et part les vendre sur le marché, 70 centimes la crêpe, pour financer un voyage scolaire en Grèce.

1. S'il réussit à vendre 25 crêpes, quel sera son bénéfice ? Et s'il n-en vend que 3 ?

   . . . .

   . . . .

2. Déterminer l'expression de la fonction B qui, à un nombre x de crêpes vendues associe le bénéfice $B(x)$.

   . . . .

   . . . .

3. Dresser le tableau de signes de f. Quel renseignements donne-t-il à Boulétos ?

   . . . .

   . . . .

5 Suites numériques

5.1 Introduction

Compléter les suites "logiques" suivantes. Donner, si possible, le $10^{\text{ème}}$ nombre de la suite, puis le $20^{\text{ème}}$.

a 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ....
b 2 ;4 ;6 ;8 ;10 ....
c 3 ;7 ;11 ;15 ;19 ....
d 2 ;4 ;8 ;16 ;32 ....
e 2 ;3 ;5 ;9 ;17 ....
f 0 ;1 ;8 ;27 ;64 ;125 ....
g 1 ;1 ;2 ;3 ;5 ;8 ;13 ;21 ....

Définition

— Une suite numérique est une liste de nombres réels, ordonnée, et indexée par les entiers naturels (ou numérotée).
— Une suite numérique se note généralement (u_n), l'indice n représentant un nombre entier naturel.
— Le nombre u_n est le terme de rang n de la suite (u_n), soit le $n^{\text{ème}}$ terme.

5.2 Modes de génération d'une suite

Définition

Une suite (u_n) est définie de manière **explicite** lorsque l'on peut exprimer le terme général u_n en fonction de son indice n.

Exemple. Pour chacune des suites suivantes, on peut calculer directement n'importe quel terme u_n de la suite en remplaçant n par la valeur souhaitée.

- ....
- ....
- ....
- ....

Exercice 1

On considère la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = 0,5n^2 + 1$.
Calculer les termes u_0, u_1, u_2 et u_{100}.
....
....
....
....

Exercice 2

On considère la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $u_n = 1 + \frac{2}{n}$.
Calculer les termes u_3, u_4, u_5 et u_{100} sous forme de fraction irréductible.
....
....
....
....

Définition

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** quand elle est définie par la donnée :

- de son terme initial, généralement u_0 ;
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant. Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = 1000 \\ u_{n+1} & = 1,04\, u_n \end{cases}$.

Alors, $u_0 = 1000$,
$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040$,
$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6$,
$u_3 = 1,04 \times u_2 = \ \dots$

Exercice 1

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = -3$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_{n+1} = 2u_n - 5$.
Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

....
....
....
....

Exercice 2

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 2$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = n + u_n$.
Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

....
....
....
....

Exercice 3

Chaque année, un magazine perd la moitié de ses abonnés mais en gagne 150 nouveaux.
En 2019, ce magazine compte 120 000 abonnés.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n le nombre d'abonnés en $2019 + n$.

1. Donner u_0. Que représente ce nombre ?
   ....
2. Calculer u_1 puis interpréter cette valeur.
   ....
   ....
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   ....
4. En utilisant la calculatrice, déterminer le nombre d'abonnés en 2024.

....

5.3 Représentation graphique

Définition

- Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.
- Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$, alors

$u_0 =$ ....

$u_1 =$ ....

$u_2 =$ ....

$u_3 =$ ....

....

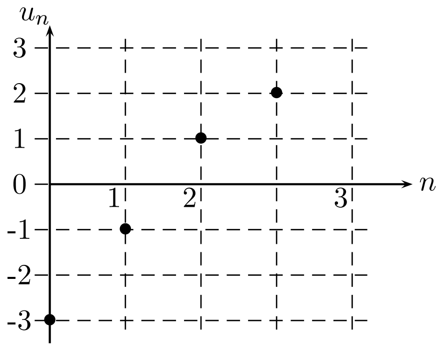
....

....

$u_{20} =$ ....

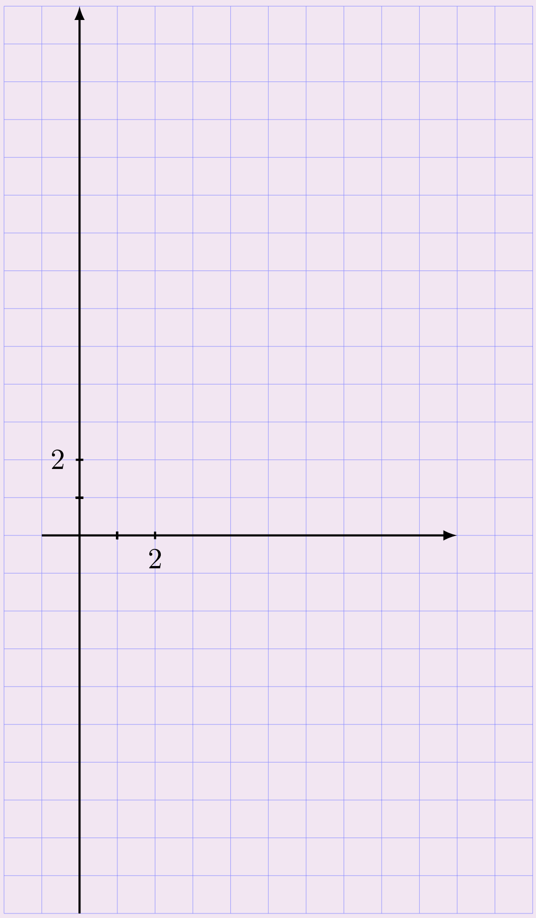
$u_{50} =$ ....

$u_{5250} =$ ....



Exercice

1. Représenter dans le repère ci-dessous la suite $u = (u_n)$ définie pour tout$n \in \mathbb{N}$ par :
   $u_n = -n^2 + 7n + 1$.



2. Quelle est l'ordonnée du point de la représentation graphique qui a pour pour abscisse 10 ?
   ....
3. Déterminer les coordonnées du point « le plus haut » qui se trouve en dessous de la droite d'équation y = -1000.
   ....

5.4 Sens de variation d'une suite

Définition

— Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier naturel n : ....

— Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier naturel n : ....

— Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n : ....

— Une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque. Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. En effet,
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ....

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ est croissante. En effet,
$u_{n+1} - u_n =$ ....

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par : $u_n = 3n + 1$. Montrer que cette suite est croissante.

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

On définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ par : $v_n = \dfrac{1}{n}$. Montrer que cette suite est décroissante.

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3

On définit la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ par : $w_n = n^2 - 1$. Montrer que cette suite est croissante.

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 4

On définit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ par : $a_n = -2n + 5$. Montrer que cette suite est décroissante.

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 5

On définit la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ par : $c_n = 1 - 2n^2$. Montrer que cette suite est décroissante.

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 6

On définit la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ par : $c_n = 1 - 2n^2$. Montrer que cette suite est décroissante.

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 7

On définit la suite positive $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_{n+1} = 4u_n$ et $u_0 = 2$. Montrer que cette suite est croissante.

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 8

On définit la suite positive $(v_n)_{n\geq 0}$ par : $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{4}$ et $v_0 = 0,5$. Montrer que cette suite est décroissante.

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 9

On définit la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ par : $w_{n+1} = w_n - 1$ et $w_0 = 0$. Montrer que cette suite est décroissante.

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 10

On définit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ par : $a_{n+1} = a_n + n$ et $a_0 = 3$. Montrer que cette suite est croissante.

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 11

On définit la suite positive $(b_n)_{n\geq 0}$ par : $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$ et $b_0 = 5$. Montrer que cette suite est décroissante.

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 12

On définit la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ par : $c_{n+1} = c_n - 2n^2$ et $c_0 = -1$. Montrer que cette suite est décroissante.

....
....
....
....
....
....
....

5.5 Suites arithmétiques

Définition

Une suite est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant un nombre réel constant r, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \cdots \quad \cdots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \cdots$$

Propriété

Une suite est arithmétique si et seulement sa représentation graphique est un nuage de points alignés. On parle alors de croissance linéaire.

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_n = -5n + 2$. Quelle est la nature de cette suite ?

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $v_0 = -5$ et $v_{n+1} = v_n + 6$. Quelle est la nature de cette suite ?

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3

Brahim décide de suivre un régime amaigrissant qui doit lui permettre de perdre 4 kg par mois. Sa masse initiale est de 115 kg. On pose $m_0 = 115$ et on note m_n sa masse après n mois de régime. Quelle est la nature de cette suite ?

....
....
....
....
....
....
....

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.
Si $r > 0$, (u_n) est croissante ; si $r < 0$, (u_n) est décroissante ; si $r = 0$, (u_n) est constante.

Exercice 4

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $r = 2$. Donner l'expression de a_n est calculer a_1 et a_2.

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -7$ et de raison $r = -15$. Donner l'expression de u_n est calculer u_1 et u_2.

....

....

....

....

....

....

....

5.6 Suites géométriques

Définition

Une suite est dite géométrique lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un nombre réel constant q, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in N$: $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \cdots \quad \ldots \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \quad \ldots$$

Exemple. — La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

— La suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ... est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $u_0 > 0$:

— Si $q > 1$, (u_n) est croissante ; si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante ; si $q = 1$, (u_n) est constante.

— Le nuage de points représentant la suite (u_n) suit une croissance exponentielle.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Remarque. — Pour prouver qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

— Pour prouver qu'une suite (u_n) est géométrique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

Exemple. — La suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_0 = -5$ et de raison $r = 2$, s'écrit sous la forme $v_n =$..

— La suite arithmétique (w_n) de premier terme $w_0 = 7$ et de raison $r = -3$, s'écrit sous la forme $w_n =$.

— La suite géométrique (z_n) de premier terme $0,2$ et de raison $q = 1,1$, s'écrit sous la forme $z_n =$ ....

Exercice 1

On définit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ par : $a_n = 4^n$. Quelle est la nature de cette suite ?

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 2

On considère la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par : $b_0 = 8$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$. Quelle est la nature de cette suite ?

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3

On considère la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ définie par : $c_n = \dfrac{1}{2^n}$. Quelle est la nature de cette suite ?

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 4

On définit la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ par : $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{2}$ et $c_0 = 5$. Montrer que cette suite est géométrique et donner son expression en fonction de n.

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 5

On définit la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ par : $w_{n+1} = w_n - 1$ et $w_0 = -1$. Montrer que cette suite est arithmétique et donner son expression en fonction de n.

....
....
....
....
....
....
....

6 Dérivation

6.1 Taux de variation

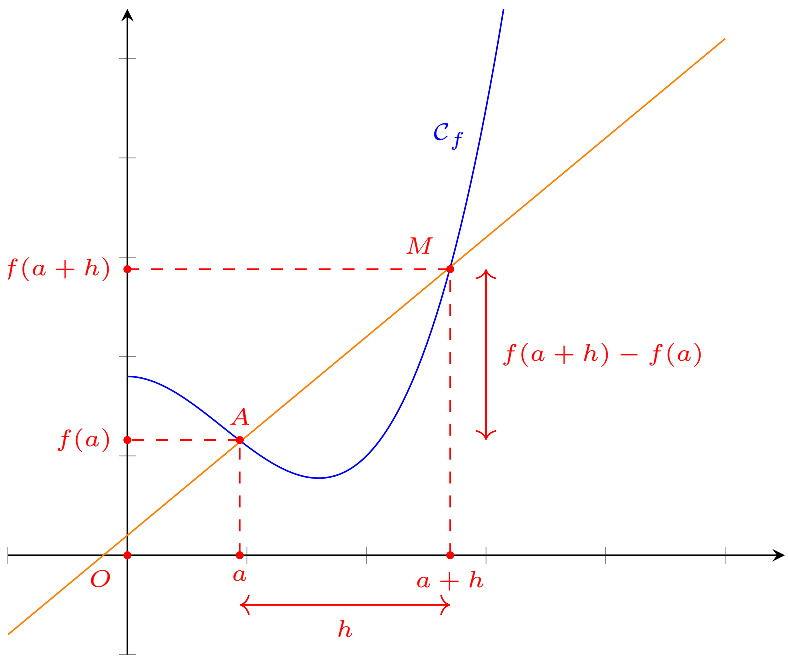
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Soit h un réel non nul tel que $a+h \in I$. Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le rapport (quotient) $t(h)$ défini par : $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Le taux de variation de f entre 1 et 2 est : ....
....

On considère deux points A et M d'une courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a+h$. La droite (AM) est appelée la sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$.
Graphiquement, le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) :

$$t(h) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 2 et 3.
   ....
   ....
   ....
2. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 4.
   ....
   ....
   ....
3. Calculer le taux de variation de f entre 1 et $1+h$.
   ....
   ....
   ....

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3$.

1. Calculer le taux de variation de g entre 2 et 3.

   ....
   ....
   ....

2. Calculer le taux de variation de g entre 2 et 4.

   ....
   ....
   ....

3. Calculer le taux de variation de g entre 2 et $2 + h$.

   ....
   ....
   ....

6.2 Nombre dérivé et tangente à une courbe

Définition

On dit que f est dérivable en a lorsque le taux de variation $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé** de f en a. On a ainsi : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Propriété

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = l$, se lit la « limite » quand h tend vers 0 de $t(h)$ égale l.
Cela signifie que lorsque le nombre h devient très proche de 0, le nombre $t(h)$ prend des valeurs très voisines de l, autrement dit, aussi proche que l'on veut.

Exemples.

— On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 1$.
Le nombre dérivé de f en 2 est déterminé par : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

....
....
....
....

— On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.
Le nombre dérivé de g en 1 est déterminé par : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h}$.

....
....
....
....

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4$.

1. Établir que pour tout réel $h \neq 0$, $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 + h$.

   ....
   ....
   ....
   ....

2. En déduire que f est dérivable en 1 et préciser la valeur du nombre dérivé de f en 1.

   ....

Exercice 2

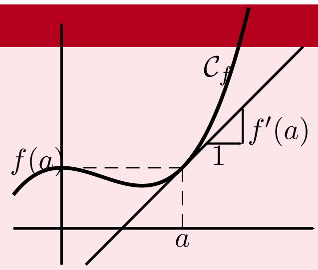
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x + 1$.

1. Établir que pour tout réel $h \neq 0$, $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = 5 + h$.
   ....
   ....
   ....
   ....
2. En déduire que f est dérivable en 3 et préciser la valeur du nombre dérivé de f en 3.
   ....

Définition

Soient f une fonction dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.
La **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation réduit est de la forme :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



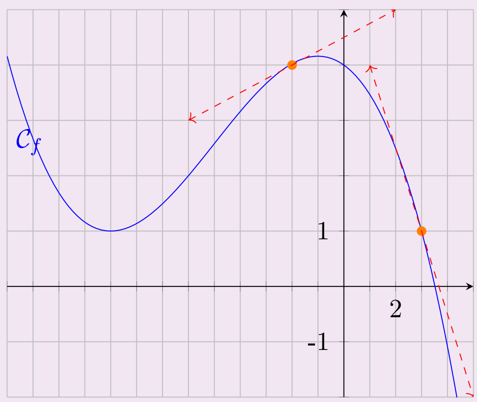
Aux alentours du point A, la tangente ....

Exemples. — On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 1$.
L'équation de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_f$ en 2 est donnée par : ....
....
....
....

— On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.
L'équation de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_g$ en 1 est donnée par : ....
....
....
....

Exercice 1

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



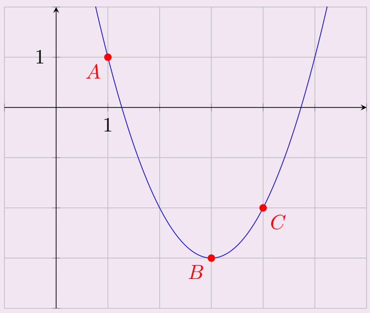
1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$: ....
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$: ....
   ....
3. Donner les équations des tangentes correspondantes.
   ....
   ....
   ....

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable en 1, en 3 et en 4 et telle que :

$$f'(1) = -4; \quad f'(3) = 0; \quad f'(4) = 2.$$

Construire les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points A, B et C et donner les équations réduites de chacune d'elles.



....
....
....
....
....
....

6.3 Fonction dérivée, signe et sens de variation

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un un intervalle I.
La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f.
On la note f'.

Propriété

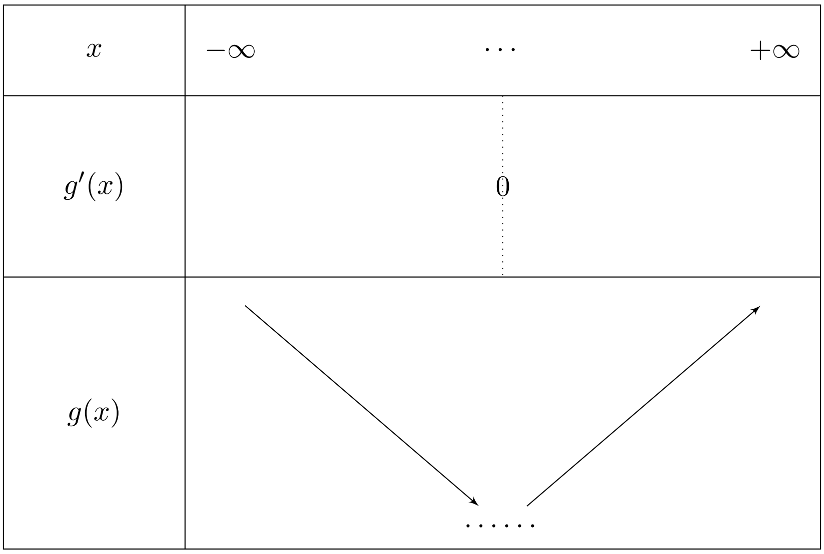
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

— Si pour tout x de I, on a $f'(x) > 0$, alors f est croissante sur I.
— Si pour tout x de I, on a $f'(x) \leqslant 0$, alors f est dcroissante sur I.
— Si pour tout x de I, on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple. On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée en x, $g'(x)$ est égale $2x$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$:

....
....
....
....
....
....
....
....

Tableau de variation :



6.4 Calcul d'une fonction dérivée

Propriété. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Propriété. Opérations sur les dérivées

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
ku, (k constante)	ku'
$u + v$	$u' + v'$

6.5 Applications aux fonctions polynômes de degré 2 et 3

Propriété

— Les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$.

— Les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Propriété

Lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe, la fonction f admet un extremum local.

Exercice 1

Calculer, pour chacune des fonctions suivantes, sa fonction dérivée.

1. $f(x) = x^2 + 4$. . . . .
2. $g(x) = x^3 + x$. . . . .
3. $h(x) = 4x^2 - 6x$. . . . .
4. $k(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 5$. . . . .
5. $u(x) = 2x^2 - 4x + 9$. . . . .
6. $v(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 9$. . . . .

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 6x - 10.$$

1. (a) Calculer $f'(x)$. ....

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$. ....

2. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   ....

   (b) En déduire que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. Préciser en quelle valeur de x il est atteint.

   ....

Exercice 3

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 500.$$

1. On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[0; 20]$ et on note f' sa dérivée. Calculer $f'(x)$. ....
2. Montrer que $f'(x) = -3(x - 2)(x - 18)$. ....
3. Donner les abscisses des points de la courbe représentative de f en lesquels la tangente est horizontale. ....
4. Étudier le signe de cette fonction dérivée puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 20]$.
   Y a-t- il un maximum sur l'intervalle $[0; 20]$? Si oui donner ses coordonnées. ....

7 Fonction exponentielle

Notation : Par convention on note $e = \exp(1)$ dont une valeur approchée est $2,7182$.

Définition

On peut écrire, pour tout entier relatif n :

$$\begin{aligned}\exp(n) &= \exp(1 \times n)\\ &= (\exp(1))^n\\ &= e^n.\end{aligned}$$

On généralise cette écriture valable pour les entiers relatifs à tous les réels x : $\exp(x) = e^x$.
On note e la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x lui associe e^x.

Propriété

- La fonction $e : x \mapsto^x$ est dérivable sur R et pour tout réel x $(e^x)' = e^x$.
- Pour tous réels a et b, on a :
  $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
  $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
  $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout réels a et tous entier relatif n, $e^{na} = (e^a)^n$. $e^0 = 1$ et pour tout réel x, $e^x > 0$.

Exercice 1 : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant qu'un seul terme en exp(...).

1. $\exp(3) \times \exp(5)$ ....
2. $\exp(2) \times \exp(-3)$ ....
3. $\exp(-5) \times \exp(-8)$ ....
4. $\exp(4) \times \exp(0,5)$ ....
5. $\exp(-7) \times \exp(7)$ ....
6. $\exp(2x) \times \exp(5x)$ ....
7. $\exp(-8x) \times \exp(3x)$ ....
8. $\exp(-4x) \times \exp(-5x)$ ....
9. $\exp(4+5x) \times \exp(-2x)$ ....

Exercice 2 : $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

Écrire les expressions suivante sans fraction :

1. $\dfrac{1}{\exp(2)}$ ....
2. $\dfrac{1}{\exp(5)}$ ....
3. $\dfrac{1}{\exp(-3)}$ ....
4. $\dfrac{1}{\exp(-1)}$ ....
5. $\dfrac{1}{\exp(2x)}$ ....
6. $\dfrac{1}{\exp(-5x)}$ ....
7. $\dfrac{1}{\exp(4-3x)}$ ....

Exercice 3 : $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Écrire les expressions suivante sans fraction :

1. $\dfrac{\exp(5)}{\exp(2)}$ ....
2. $\dfrac{\exp(-4)}{\exp(3)}$ ....
3. $\dfrac{\exp(7)}{\exp(-5)}$ ....
4. $\dfrac{\exp(-2)}{\exp(-6)}$ ....
5. $\dfrac{\exp(-7)}{\exp(-5)}$ ....
6. $\dfrac{\exp(5x)}{\exp(2x)}$ ....
7. $\dfrac{\exp(x+3)}{\exp(x)}$ ....
8. $\dfrac{\exp(4x)}{\exp(3+6x)}$ ....
9. $\dfrac{\exp(3x+5)}{\exp(x+2)}$ ....

Exercice 4 : $[\exp(a)]^n = \exp(na)$

Simplifier les expressions suivantes en n'utilisant qu'un seul terme en $\exp(\ldots)$

1. $[\exp(5)]^3$ ....
2. $[\exp(-4)]^2$ ....
3. $[\exp(6)]^{-4}$ ....
4. $[\exp(-10)]^{-2}$ ....
5. $[\exp(5x)]^2$ ....
6. $[\exp(4x-3)]^5$ ....
7. $[\exp(8x-2)]^{-4}$ ....