Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Partie A

On considère la variable aléatoire X donnant le gain à un jeu de grattage dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

x_i	0	2	4	6	10	20	100	1 000	25 000
$P(X=x_i)$	0,682	0,1435	0,103	0,0363	0,0225	0,0126	$9,73\times10^{-5}$	2×10^{-6}	7×10^{-7}

1. On a par définition :

$$\begin{array}{rcl} E(X) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{9} x_i P(X=x_i) \\ & = & 0\times 0,0,682 + 2\times 0,1435 + \cdots + 25000\times 7\times 10^{-7} \\ & = & 1,42303 \\ & \approx & 1,423. \end{array}$$

2. (a) On a :

$$\begin{array}{rcl} P\left(|X-E(X)|\geqslant 15\right) & = & 1-P\left(\overline{|X-E(X)|\geqslant 15}\right) \\ & = & 1-P\left(|X-E(X)|<15\right) \\ & = & 1-P\left(-15<X-E(X)<15\right) \\ & = & 1-P\left(-15+E(X)<X<15+E(X)\right) \\ & = & 1-P\left(-15+1,42303<X<15+1,42303\right) \\ & = & 1-P\left(-13,57697<X<16,42303\right). \end{array}$$

Delpus, selon le tableau donnant la loi de probabilité de X, on a :

$$\begin{array}{rcl} P\left(-12,57697<X<15,42303\right) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{5} P(X=x_i) \\ & = & 0,682+0,1435+0,103+0,0363+0,0225 \\ & = & 0,9873. \end{array}$$

Ainsi, $P\left(|X-E(X)|\geqslant 15\right) = 1-0,9873 = 0,0127$.

(b) En raisonnant de la même manière que dans la question précédente, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} P\left(|X-E(X)|\geqslant 100\right) & = & 1-P\left(\overline{|X-E(X)|\geqslant 100}\right) \\ & = & 1-P\left(|X-E(X)|<100\right) \\ & = & 1-P\left(-100<X-E(X)<100\right) \\ & = & 1-P\left(-100+E(X)<X<100+E(X)\right) \\ & = & 1-P\left(-100+1,42303<X<100+1,42303\right) \\ & = & 1-P\left(-98,57697<X<101,42303\right) \\ & = & 1-\left(1-2\times10^{-6}-7\times10^{-7}\right) \\ & = & 2\times10^{-6}+7\times10^{-7} \\ & = & 6,7\times10^{-6}. \end{array}$$

(c) Idem, En raisonnant de la même manière que dans la question précédente, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} P\left(|X-E(X)|\geqslant 10000\right) & = & 1-P\left(\overline{|X-E(X)|\geqslant 10000}\right) \\ & = & 1-P\left(|X-E(X)|<10000\right) \\ & = & 1-P\left(-10000<X-E(X)<10000\right) \\ & = & 1-P\left(-10000+E(X)<X<10000+E(X)\right) \\ & = & 1-P\left(-10000+1,42303<X<10000+1,42303\right) \\ & = & 1-P\left(9998,57697<X<10000,42303\right) \\ & = & 1-\left(1-7\times10^{-7}\right) \\ & = & 7\times10^{-7}. \end{array}$$

3. On peut conjucturer le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{\delta\to+\infty} P\left(|X-E(X)|\geqslant\delta\right)=0$.

Partie B

On admet que la variance de X est $V(X) = 450$ (en réalité, 450 est un arrondi à l'entier).

1. Lorsque $\delta = 15$, $\dfrac{V(X)}{\delta^2} = \dfrac{450}{15^2} = 2$.

   Lorsque $\delta = 100$, $\dfrac{V(X)}{\delta^2} = \dfrac{450}{100^2} = 0,045$.

   Lorsque $\delta = 10000$, $\dfrac{V(X)}{\delta^2} = \dfrac{450}{10000^2} = 4,5 \times 10^{-6}$.

2. Dans les trois cas, on a : $P(|X - E(X)| \geqslant \delta) < \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.
3. Selon les calculs précédents, il semble que :
$$P(|X - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Partie C

1. En utilisant la conjecture de la partie B, on obtient :
$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma) \leqslant \frac{V(X)}{4\sigma^2} \quad &\Leftrightarrow \quad P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma) \leqslant \frac{V(X)}{4V(X)} \\ &\Leftrightarrow \quad P\big(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma\big) \leqslant \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
2. La probabilité que l'écart en valeur absolue entre les valeurs prises la variable aléatoite et la moyenne soit deux fois supérieur à l'écart-type est majorée par 0,25.

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(X)$. Quel que soit le réel $\delta > 0$,
$$P(|X - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Bilan

Exercice 1

Soit A une variable aléatoire telle que $p(A \in]-4;12[) = 0,72$. On a :
$$\begin{aligned} p(|A-4| \geqslant 8) &= 1 - p(\overline{|A-4| \geqslant 8}) \\ &= 1 - p(|A-4| < 8) \\ &= 1 - p(-8 < A - 4 < 8) \\ &= 1 - p(-8+4 < A < 8+4) \\ &= 1 - p(-4 < A < 12) \\ &= 1 - p(A \in]-4;12[) \\ &= 1 - 0,72 \\ &= 0,28. \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit B une variable aléatoire. On a :
$$\begin{aligned} p(|B-8| \geqslant 3) \leqslant 0,36 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - p(\overline{|B-8| \geqslant 3}) \leqslant 0,36 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - p(|B-8| < 3) \leqslant 0,36 \\ &\Leftrightarrow \quad -p(|B-8| < 3) \leqslant 0,36 - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -p(|B-8| < 3) \leqslant -0,64 \\ &\Leftrightarrow \quad p(|B-8| < 3) \geqslant 0,64. \end{aligned}$$
D'où le résultat.

Exercice 3

Soit C une variable aléatoire. On a :
$$\begin{aligned} p(|C-4| < 3) > 0,98 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - p(\overline{|C-4| < 3) > 0,98}) \leqslant 0,98 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - p(|C-4| \leqslant 3) > 0,98 \\ &\Leftrightarrow \quad -p(|C-4| \leqslant 3) > 0,98 - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -p(|C-4| \leqslant 3) > -0,02 \\ &\Leftrightarrow \quad p(|C-4| \leqslant 3) < 0,02. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 4

Soit B une variable aléatoire. On a :

$$\begin{aligned} p(|B+12| \geqslant 2) \leqslant 0,11 &\Leftrightarrow 1-p(\overline{|B+12| \geqslant 2}) \leqslant 0,11 \\ &\Leftrightarrow 1-p(|B+12|<2) \leqslant 0,11 \\ &\Leftrightarrow -p(|B+12|<2) \leqslant 0,11-1 \\ &\Leftrightarrow -p(|B+12|<2) \leqslant -0,89 \\ &\Leftrightarrow p(|B+12|<2) \geqslant 0,89. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 5

Soit Z une variable aléatoire tel que $p(Z \in [7;8]) = 0,25$ et $p(Z \in]8;13]) = 0,3$.

1. On remarque que : $[7;8] \cup]8;13] = [7;13]$ et $[7;8] \cap]8;13] = \varnothing$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p(Z \in [7;13]) &= p(Z \in [7;8] \cup]8;13]) \\ &= p(Z \in [7;8]) + p(Z \in]8;13]) \\ &= 0,25+0,3 \\ &= 0,55. \end{aligned}$$

   Par ailleurs,

$$\begin{aligned} p(Z \in [7;13]) &= p(7 \leqslant Z \leqslant 13) \\ &= p(7-10 \leqslant Z-10 \leqslant 13-10) \\ &= p(-3 \leqslant Z-10 \leqslant 3) \\ &= p(|Z-10| \leqslant 3) \\ &= 0,55. \end{aligned}$$

2. En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} p(|Z-10| \leqslant 3) = 0,55 &\Leftrightarrow 1-p(\overline{|Z-10| \leqslant 3}) = 0,55 \\ &\Leftrightarrow -p(|Z-10|>3) = -0,45 \\ &\Leftrightarrow p(|Z-10|>3) = 0,45. \end{aligned}$$

Exercice 6

Soit A une variable aléatoire. On a :

$$\begin{cases} p(|A-10|<3) = 0,4 \\ p(|A-8|<1) = 0,15 \\ p(A=9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(-3<A-10<3) = 0,4 \\ p(-1<A-8<1) = 0,15 \\ p(A=9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(7<A<13) = 0,4 \\ p(7<A<9) = 0,15 \\ p(A=9) = 0 \end{cases}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} p(|A-11|<2) &= p(-2<A-11<2) \\ &= p(9<A<13) \\ &= p(7<A<13) - p(7<A<9) - p(A=9) \\ &= 0,4-0,15-0 \\ &= 0,25. \end{aligned}$$

Exercice 7

On considère la variable aléatoire D donnant le débit de la Loire en $m^3.s^{-1}$ à Tours à un instant t. Une étude statistique permet de considérer que $E(D) = 350$ et $V(D) = 28000$.

1. En utilisant l'inégalité de Tchebytchev, on obtient :

$$\begin{aligned} p(|D-350| \geqslant 200) &\leqslant \frac{V(D)}{200^2} \\ &\leqslant \frac{28000}{40000}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $p(|D-350| \geqslant 200) < \dfrac{7}{10}$, autrement dit, $p(D \geqslant 550 \text{ ou } D \leqslant 200) < \dfrac{7}{10}$. Cela signifie que, la probabilité que le débit de la Loire à l'instant t soit inférieur ou égal à 150 $m^3.s^{-1}$ ou supérieur ou égal à $350+200 = 550$ m^3s^{-1} est inférieure à 0,7.

2. On a :

$$\begin{array}{rcl} p(50 < D < 650) & = & p(50-350 < D-350 < 650-350) \\ & = & p(-300 < D-350 < t300) \\ & = & p(|D-350| < 300) \\ & = & 1-p(\overline{|D-350| < 300}) \\ & = & p(|D-350| \geqslant 300). \end{array}$$

De plus, selon l'inégalité de Tchevbytchev, on a :

$$\begin{array}{rcl} p\left(|D-350| \geqslant 300\right) \leqslant \dfrac{V(D)}{300^2} & \Leftrightarrow & p\left(|D-350| \geqslant 300\right) \leqslant \dfrac{28000}{90000} \\ & \Leftrightarrow & p\left(|D-350| \geqslant 300\right) \leqslant \dfrac{14}{45}. \end{array}$$

Dès lors, $p(50 < D < 650) \geqslant 1 - \dfrac{14}{45}$ soit, $p(50 < D < 650) \geqslant \dfrac{31}{45}$.

Exercice 8

Dans un cabinet médical, le nombre de patient(e)s vu(e)s chaque jour par un médecin est donné par une variable aléatoire P d'espérance $E(P) = 32$ et de variance $V(P) = 9$.

1. (a) En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} p(|P-32| \geqslant 6) \leqslant \dfrac{V(P)}{6} & \Leftrightarrow & p(|P-32| \geqslant 6) \leqslant \dfrac{9}{6^2} \\ & \Leftrightarrow & -p(|P-32| \geqslant 6) \geqslant -\dfrac{1}{4} \\ & \Leftrightarrow & 1-p(|P-32| \geqslant 6) \geqslant 1-\dfrac{1}{4} \\ & \Leftrightarrow & p(|P-32| < 6) \geqslant \dfrac{3}{4}. \end{array}$$

   (b) D'après la questions précédente, on a : $p(26 < P < 40) \geqslant \dfrac{3}{4}$.

   Ceci signifie que la probabilité qu'un médecin reçoit entre 27 et 39 patients est supérieure ou égale à $\dfrac{3}{4}$.

2. On a :

$$\begin{array}{rcl} p(P \leqslant 21 \text{ ou } P \geqslant 41) & = & p(P-32 \leqslant -11 \text{ ou } P-32 \geqslant 11) \\ & = & 1-p(\overline{P-32 \leqslant -11 \text{ ou } P-32 \geqslant 11}) \\ & = & 1-p(\overline{P-32 \leqslant -11} \text{ et } \overline{P-32 \geqslant 11}) \\ & = & 1-p(-11 < P-32 < 11) \\ & = & 1-p(|P-32| < 11) \\ & = & p(|P-32| \geqslant 11). \end{array}$$

En utilisant l'inégalité de Tchebytchev, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} p(|P-32| \geqslant 11) \leqslant \dfrac{V(P)}{11^2} & \Leftrightarrow & p(|P-32| \geqslant 11) \leqslant \dfrac{9}{121} \\ & \Leftrightarrow & p(P \leqslant 21 \text{ ou } P \geqslant 41) \leqslant \dfrac{9}{121}. \end{array}$$

D'où le résultat.

Exercice 9

On considère que le temps passé quotidiennement sur Internet par Maria (en heures) est donné par une variable aléatoire I d'espérance $E(I) = 2$ et de variance $V(I) = 0,25$.
On sait que :

$$\begin{array}{rcl} p(1 < I < 3) & = & p(1-2 < I-2 < 3-2) \\ & = & p(-1 < I-2 < 1) \\ & = & p(|I-2| < 1) \\ & = & 1-p(\overline{|I-2| < 1}) \\ & = & 1-p(|I-2| \geqslant 1). \end{array}$$

En utilisant l'inégalité de TchebyTchev, on obtient :

$$\begin{aligned} p(|I-2| \geqslant 1) \leqslant \frac{V(I)}{1^2} & \Leftrightarrow & p(|I-2| \geqslant 1) \leqslant 0,25 \\ & \Leftrightarrow & -p(|I-2| \geqslant 1) \geqslant -0,25 \\ & \Leftrightarrow & 1-p(|I-2| \geqslant 1) \geqslant 0,75 \\ & \Leftrightarrow & p(1 < I < 3) \geqslant 0,75. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 10

Dans une population, la taille en cm d'une personne adulte prise au hasard est donnée par une variable aléatoire :

— F, d'espérance 165 et de variance 25 pour une femme ;

— H, d'espérance 180 et de variance 36 pour un homme.

1. (a) En utilisant l'inégalité de TchebyTchev, on obtient :

$$p(|F-165| \geqslant 8) \leqslant \frac{V(F)}{8^2} \quad \Leftrightarrow \quad p(|F-165| \geqslant 8) \leqslant \frac{25}{64}.$$

   (b) On a :

$$\begin{aligned} p(|F-165| \geqslant 8) &= p(F-165 \geqslant 8 \quad F-165 \leqslant -8) \\ &= p(F \geqslant 8+165 \text{ ou } F \leqslant -8+165) \\ \\ &= p(F \geqslant 173 \text{ ou } F \leqslant 157) \end{aligned}$$

   Ainsi,$p(F \geqslant 173 \text{ ou } F \leqslant 157) \leqslant \dfrac{25}{64}$.

2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$p(|H-180| \geqslant 10) \leqslant \frac{V(H)}{10^2} \quad \Leftrightarrow \quad p(|H-180| \geqslant 8) \leqslant \frac{36}{100}.$$

   Cela signifie que la probabilité que la taille d'un homme de cette population soit inférieure ou égale à 170 cm, ou supérieure ou égale à 190 cm, est inférieure où égale à 0,36.