

BACHOTAGE

Terminale Spécialité Mathématiques



Σ Exercice 1.

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N .
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
 - a. Exprimer T en fonction de N .
 - b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T . Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
 - c. Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

Partie B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.

On note X_1, X_2, \dots, X_n les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^e, ..., n -ième matchs.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X .

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
 - a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .
 - c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
 - d. En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.
2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

Σ Exercice 2.

On considère n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; 1]$ et on note f'_n sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = x e^{1-x}.$$

1. Montrer que $f'_1(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0 ; 1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 1]$
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

- c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

- b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
from math import exp

def suite():
    u = ...
    for n in range (1, ...):
        u = ...
    return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Σ Exercice 3.

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$u_n = \frac{25 + (-1)^n}{n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 &= 1 \\ w_{n+1} &= \frac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n , $w_n > 0$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \frac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \ln(1 + v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n , $v_n > 0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_1^e [\ln(x)]^n dx$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

Σ Exercice 4.

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.

L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans U_2 .

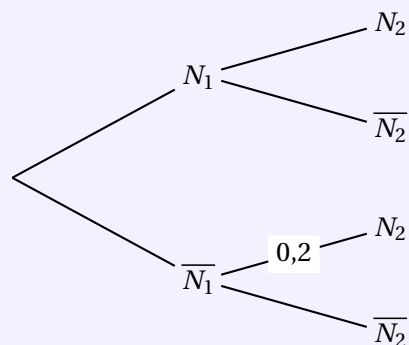
On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout évènement A , on note \bar{A} son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.
- Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est 0,2.
 - Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 .
3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2
Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2} .

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 , entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 .

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X . Justifier votre réponse.
2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :

$$1 - 0,72^n \geq 0,9.$$

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :

On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 .

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

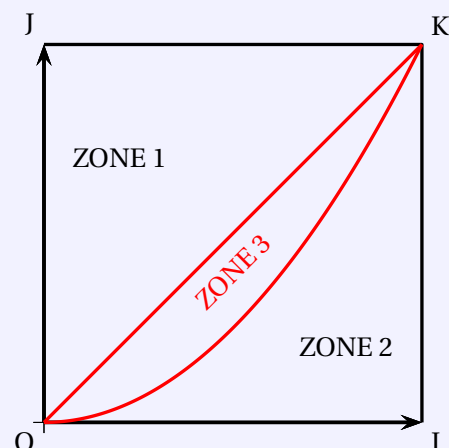
On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

Σ Exercice 5.

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ ci-contre, on a représenté :

- la droite d'équation $y = x$;
- la droite d'équation $y = 1$;
- la droite d'équation $x = 1$;
- la parabole d'équation $y = x^2$.

On peut ainsi partager le carré $OIKJ$ en trois zones.



Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Partie A

Démontrer les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

ZONE	ZONE 1	ZONE 2	ZONE 3
AIRE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Partie B : un premier jeu

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- Si la fléchette tombe sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée.
Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces. Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 » ;

G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{2}{9}$.
3. On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 ?

Partie C : un second jeu

Un joueur, appelé joueur $n^{\circ} 1$, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone.

Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE 3, le joueur gagne 3 euros.

On note X_1 la variable aléatoire donnant le gain du joueur $n^{\circ} 1$.

On note respectivement $E(X_1)$ et $V(X_1)$ l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1 .

1.
 - a. Calculer $E(X_1)$.
 - b. Montrer que $V(X_1) = \frac{5}{9}$.
2. Un joueur $n^{\circ} 2$ et un joueur $n^{\circ} 3$ jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur $n^{\circ} 1$. On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres.
On note X_2 et X_3 les variables aléatoires donnant les gains des joueurs $n^{\circ} 2$ et $n^{\circ} 3$. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2 + X_3$.
 - a. Déterminer la probabilité que l'on ait $Y = 9$.
 - b. Calculer $E(Y)$.
 - c. Justifier que $V(Y) = \frac{5}{3}$.

Σ Exercice 6.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.
3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.
6.
 - a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.
 - b. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

- c. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation $f(x) = x$.
- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Σ Exercice 7.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f .
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude $0,01$.
 - c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe \mathcal{C}_g d'abscisse x . On note OM la distance entre les points O et M.

- a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x .
- b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .
- c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0; +\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe \mathcal{C}_g . On note d cette distance.
Exprimer d à l'aide de α .

Σ Exercice 8.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.

Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère la droite Δ_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ ainsi que la droite Δ_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$.

- Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.
- Les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.
- Les droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes.

2. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$, et le plan P d'équation cartésienne : $4x + 2y - z + 3 = 0$.

- La droite d est incluse dans le plan P .
- La droite d est parallèle strictement au plan P .
- La droite d est sécante au plan P .

3. On considère les points $A(3; 2; 1)$, $B(7; 3; 1)$, $C(-1; 4; 5)$ et $D(-3; 3; 5)$.

- Les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
- Les points A , B et C sont alignés.
- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

4. On considère les plans Q et Q' d'équation cartésienne respective $3x - 2y + z + 1 = 0$ et $4x + y - z + 3 = 0$.

- Le point $R(1; 1; -2)$ appartient aux deux plans.
- Les deux plans sont orthogonaux.

- Les deux plans sont sécants avec pour intersection la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 7t + 4 \\ z = 11t + 7 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Σ Exercice 9.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P): 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

On considère les trois points A , B et C de coordonnées :

$$A(1; 0; 1), B(2; -1; 1) \text{ et } C(-4; -6; 5).$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

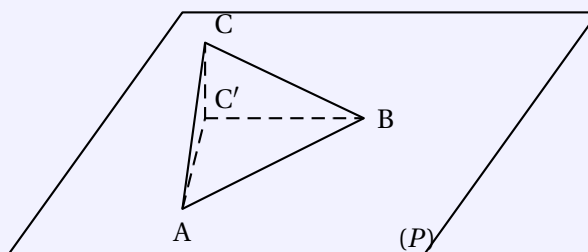
Partie A

- Pour chacun des points A , B et C , vérifier s'il appartient au plan (P) .
- Montrer que le point $C'(0; -2; -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P) .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions

$$\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur \overrightarrow{HC} sont : $\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

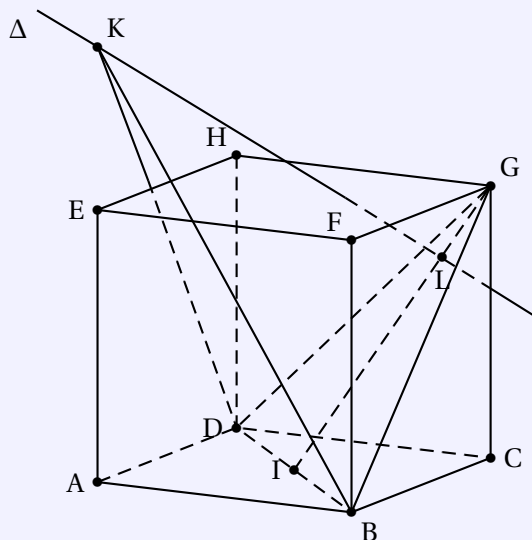
Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2.
 - a. Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.
 - b. Calculer S' l'aire du triangle ABC' , on donnera la valeur exacte.
 - c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Σ Exercice 10.

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4} \overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1.
 - a. Préciser les coordonnées des points D, B, I et G. Aucune justification n'est attendue.
 - b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.
3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.
 - a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

- b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0; 0; \frac{13}{8}\right)$.
 - c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.
4.
 - a. Calculer la distance KL.
 - b. On admet que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.

On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base;
 - un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.
5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0; 0; a)$.
 - a. Exprimer le volume \mathcal{V}_a de la pyramide ABCDK_a en fonction de a .
 - b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

On appelle I_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Montrer que les coordonnées du point I_a sont $\left(\frac{a+1}{3}; \frac{a+1}{3}; \frac{2a-1}{3}\right)$.

- c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.

Σ Exercice 11.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

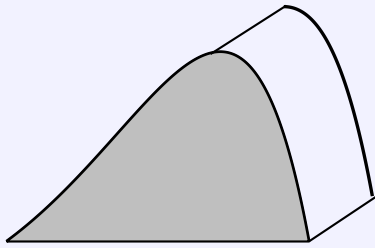


Figure 1

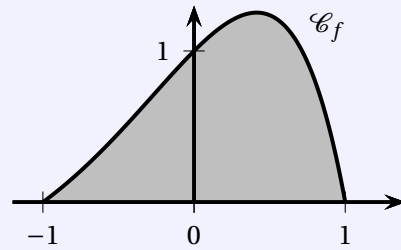


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)e^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$ on a $f(x) \geq 0$.
- b.** Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx.$$

2. Le volume \mathcal{V} de chocolat, en cm^3 , nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2 , de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume \mathcal{V} , arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3 .

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01; +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3 \ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01; +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim_{q \rightarrow +\infty} B(q)$.
- b.** Montrer que, pour tout $q \geq 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6 \ln(q))$.
- c.** Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01; +\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction B .
- d.** Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?
2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.
- b.** On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01; 1,2[$.
On donne $\alpha \approx 0,757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Σ Exercice 12.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leq S_n \leq 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geq 1, v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^n - n$.

Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n .

```
def u(n) :  
    valeur = 2  
    for k in range(n) :  
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)  
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leq u_n \leq 2.$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Σ Exercice 13.

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

a. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.

b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i , pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i -ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_1 + \dots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, \dots, M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ .

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S .

Montrer que : $s = 10\sigma$.

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.

a. Montrer que cette condition est équivalente à :

$$P(|S - 200| \geq 1) \leq 0,1.$$

b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

Σ Exercice 14. La partie C est indépendante des parties A et B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

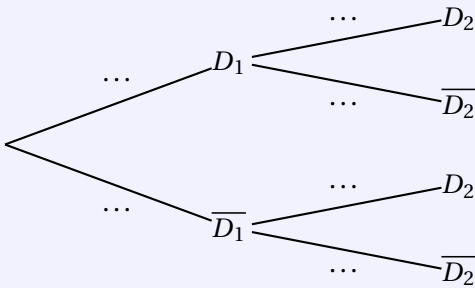
- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n -ième déplacement » ;
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'évènement D_n .

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement?

Partie B : étude de la suite (p_n) .

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

On pourra s'aider d'un arbre.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

- b. La suite (p_n) est-elle convergente? Justifier.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
 - b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

Σ Exercice 15.

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx.$$

1. Calculer I_0 .
2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
 b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
 c. Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}.$$

c. Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .

4. a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

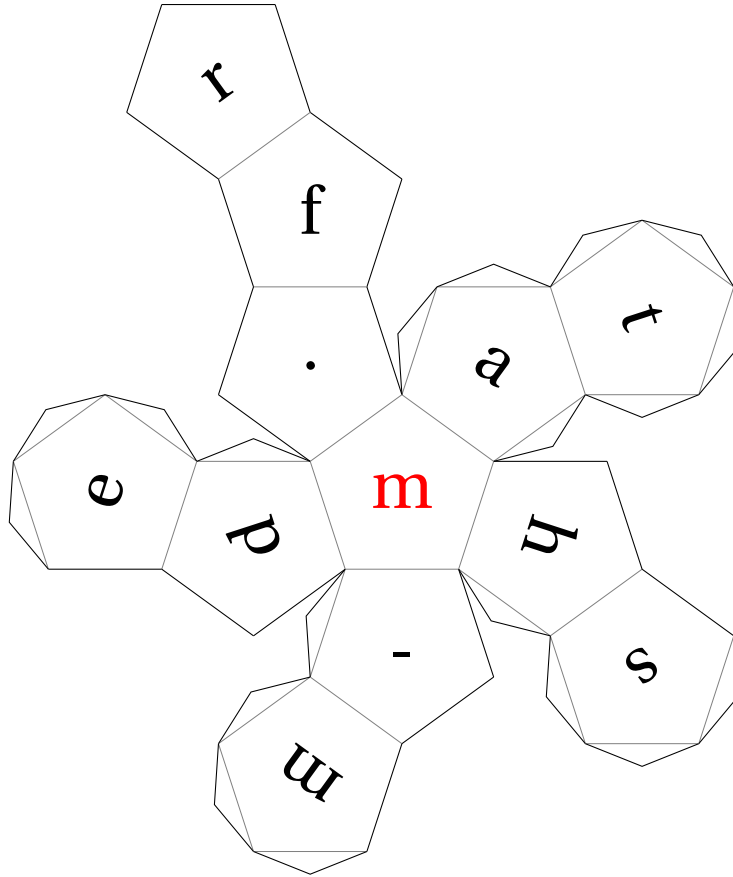
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2 def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6     n=n+1
7     I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8 return n
```

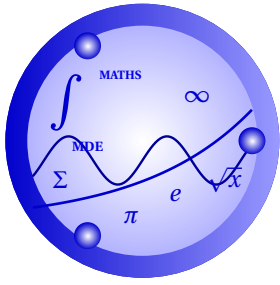
Sujets du Bac

MATHÉMATIQUES Terminale Spé

2025-2026



Lycée Évariste Galois



Amérique du Nord

Sujet 1 - 20 mai 2026

Σ Exercice 1.

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

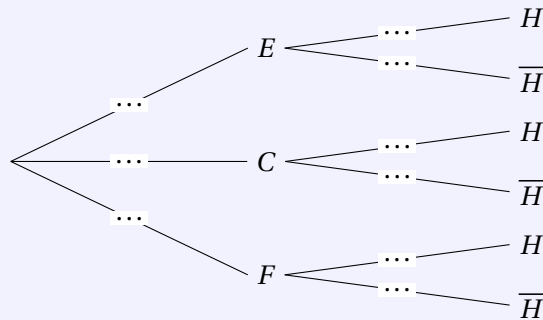
- 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.
3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.
4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». On arrondira le résultat au millième.

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». *On arrondira le résultat au millième.*
3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.
On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise.
On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».
 - a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0,5875^n$.
 - b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9%.

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 € de plus par mois, quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y .
2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .
3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.
4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y , arrondie au centième.
5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.
On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

- a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z .
- b. Un responsable affirme que, si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50% de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.
Justifier cette affirmation.

Σ Exercice 2.

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1^{er} janvier 2025.

Partie A : Étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n) .

Pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n .

La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 4$.
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n , $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1^{er} janvier 2026 donné par ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = 4 - \frac{4}{x}$.

- Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

- En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
- Justifier que $\ell = 2$.
- Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante?

3. On considère le script Python ci-dessous.

- Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2; 4[$.
Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.
- Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)`?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def population(s) :
    u=4
    n=0
    while... :
        u=...
        n=...
    return n
```

Partie B : Étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1^{er} janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

- la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$;
- $p(0) = 4$;
- la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = 2$ où y est une fonction de la variable réelle t .

- Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).
- En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $p(t) = 2e^{-t} + 2$.
- Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante?

Σ Exercice 3.

Dans cet exercice l'unité est le centimètre.

On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme dans la figure ci-dessous.

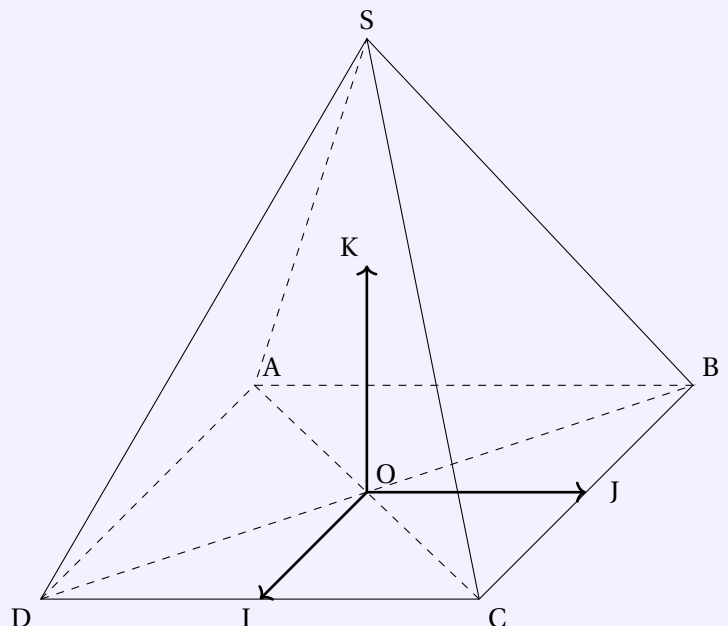
Dans cette figure :

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$ cm ;
- I est le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[OS]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$.

On admet que $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 1; 0)$, et $S(0; 0; 2)$.

Les parties A et B sont indépendantes.



Partie A :

1. Donner les coordonnées des points A et D.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$.
3. En déduire la mesure de l'angle \widehat{BSC} arrondie au dixième de degré près.

Partie B :

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC).

1. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que le vecteur \vec{n} est normal au plan (SBC).
 - b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.
2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).
 - a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- b. Calculer les coordonnées du point H.
- c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C :

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

- a. Calculer le volume de la pyramide SABCD.
 - b. En déduire que le volume de la pyramide OCBS est égal à $\frac{2}{3}$ cm³.
2. Déterminer l'aire du triangle SBC.
 3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Σ Exercice 4.

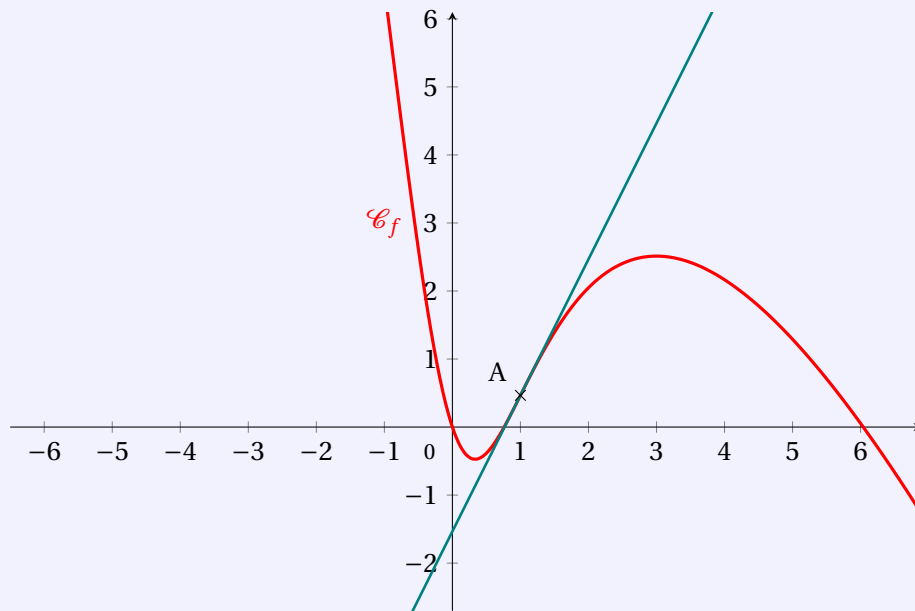
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$$

et on admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f et la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.



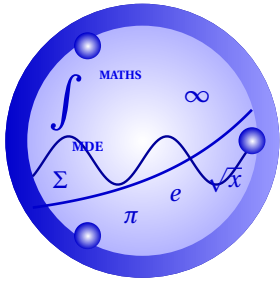
1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f , les intervalles de \mathbb{R} sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

- b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.
4. a. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.
- b. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$$

- a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
- b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.
- c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.



Amérique du Nord

Sujet 2 - 21 mai 2026

Σ Exercice 1.

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.

Il a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

On choisit au hasard une tomate dans le stock.

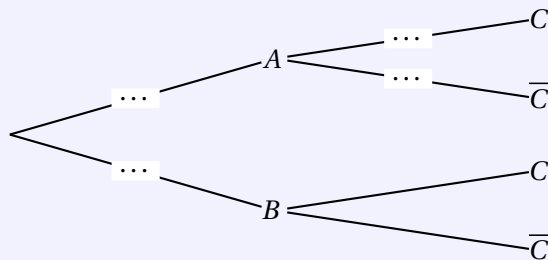
On désigne par :

- A l'évènement « La tomate provient du fournisseur A »;
- B l'évènement « La tomate provient du fournisseur B »;
- C l'évènement « La tomate est commercialisable ».

Pour un évènement quelconque E , on note $P(E)$ la probabilité de E .

Partie A

1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.



2.
 - a. Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A
 - b. Démontrer que $P_B(C) = 0,85$.
 - c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison?

Partie B

On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.
 - a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millième.
 - c. Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millième.

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n , la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

$$\text{On a donc } F_n = \frac{X_n}{n}.$$

On admet que la variable aléatoire X_n , suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09.

- Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n .
- Démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$.
- Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables.
Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre? Justifier la réponse.

Σ Exercice 2.

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

- Résoudre l'équation $f(x) = x$.
- a. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\text{Vérifier que, pour tout réel } x, \text{ on a } f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

- En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.
- En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie B**.
Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

- Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.
- En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$ pour tout entier naturel n .
- En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$.

- Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

```

from math import*

def termes(p) :
    u = ...
    S=0
    L= [ ]
    for i in range(p)
        S=...
        u= ...
        L.append(S)
    return L

```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande $L = []$ crée une liste vide;
 - la commande $L.append(S)$ ajoute, à la fin de la liste L , l'élément supplémentaire S .
2. On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.
3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Σ Exercice 3.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- le plan \mathcal{P} contenant le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ contient le point $C(1; 1; 1)$ mais pas le point A .
2.
 - a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan est $2x + y + 2z - 14 = 0$.
 - b. Vérifier que le plan \mathcal{P} contient le point B mais pas le point C .
3. On considère le point $D(3; 2; 3)$.
 - a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan \mathcal{P} .
 - b. Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
 - c. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.
 - d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .
 - a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.
 - b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.
 - c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

Σ Exercice 4.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.
 - a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$.
 - b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a. Démontrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1]$.
4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
 - a. Justifier que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.
 - b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$.
5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.
 - a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x) dx$.
 - b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx.$$

- c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

- d. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x) dx$ quand a tend vers 0.