

Question 1 : (1 point)

Soit A une variable aléatoire. On a :

$$\begin{aligned} p(|A - 5| \geq 3) \leq 0,3 &\Leftrightarrow 1 - p(|A - 5| < 3) \leq 0,3 \\ &\Leftrightarrow 1 - p(|A - 5| < 3) \leq 0,3 \\ &\Leftrightarrow -p(|A - 5| < 3) \leq 0,3 - 1 \\ &\Leftrightarrow -p(|A - 5| < 3) \leq -0,7 \\ &\Leftrightarrow p(|A - 5| < 3) \geq 0,7. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Question 2 : (1 point)

Soit B une variable aléatoire. On a :

$$\begin{aligned} p(|B - 10| < 3) > 0,99 &\Leftrightarrow 1 - p(|B - 10| \leq 3) > 0,99 \\ &\Leftrightarrow 1 - p(|B - 10| \leq 3) > 0,99 \\ &\Leftrightarrow -p(|B - 10| \leq 3) > 0,99 - 1 \\ &\Leftrightarrow -p(|B - 10| \leq 3) > -0,01 \\ &\Leftrightarrow p(|B - 10| \leq 3) < 0,01. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Question 3 : (1 point)

On remarque que : $[6; 9] \cup]9; 15] = [6; 15]$ et $[6; 9] \cap]9; 15] = \emptyset$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p(X \in [6; 15]) &= p(X \in [6; 9] \cup]9; 15]) \\ &= p(X \in [6; 9]) + p(X \in]9; 15]) \\ &= 0,15 + 0,35 \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} p(X \in [6; 15]) &= p(6 \leq X \leq 15) \\ &= p(6 - 10,5 \leq X - 10,5 \leq 15 - 10,5) \\ &= p(-4,5 \leq X - 10,5 \leq 4,5) \\ &= p(|X - 10,5| \leq 4,5) \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

De plus, $p(|X - 10,5| \leq 4,5) = 1 - p(|X - 10,5| \leq 4,5) = 0,5$.
En conséquence, Amélie et Manon ont toutes les deux raison.

Question 4 : (1 point)

On sait que :

$$\begin{aligned}
 p(1 < I < 5) &= p(1 - 3 < I - 3 < 5 - 3) \\
 &= p(-2 < I - 3 < 2) \\
 &= p(|I - 3| < 2) \\
 &= 1 - p(|I - 3| \geq 2) \\
 &= 1 - p(|I - 3| \geq 2).
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de TchebyTchev, on obtient :

$$\begin{aligned}
 p(|I - 3| \geq 2) &\leq \frac{V(I)}{2^2} \Leftrightarrow p(|I - 3| \geq 2) \leq 0,125 \\
 &\Leftrightarrow -p(|I - 3| \geq 2) \geq -0,125 \\
 &\Leftrightarrow 1 - p(|I - 3| \geq 2) \geq 0,875 \\
 &\Leftrightarrow p(1 < I < 5) \geq 0,875.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que Tigane reste entre 1 et 5 (exclues) sur sa console est supérieure ou égale à 0,875.

Question 5 : (1 point)

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$$\begin{aligned}
 p(|N - 32| \geq 6) &\leq \frac{V(N)}{6} \Leftrightarrow p(|N - 32| \geq 6) \leq \frac{9}{6^2} \\
 &\Leftrightarrow -p(|N - 32| \geq 6) \geq -\frac{1}{4} \\
 &\Leftrightarrow 1 - p(|N - 32| \geq 6) \geq 1 - \frac{1}{4} \\
 &\Leftrightarrow p(|N - 32| < 6) \geq \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

Dès lors, $p(26 < N < 38) \geq \frac{3}{4}$. Ceci signifie que la probabilité qu'Esther-Anne s'entraîne entre 27 et 37 heures incluses est supérieure ou égale à $\frac{3}{4}$.

Question 6 : (1 point)

Pour tout $1 \leq i \leq 100$, $X_i \sim \mathcal{B}(20; 0,6)$. Ainsi,

$$\begin{cases} E(X_i) = np = 12 \\ V(X_i) = np(1 - p) = 12 \times 0,4 = 4,8 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} E(M) = E(X_i) = 12 \\ V(M) = \frac{V(X_i)}{100} = 0,048. \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de TchebyTchev, on obtient : $p(|M - 12| \geq 4) \leq \frac{0,048}{4^2}$, soit $p(|M - 12| \geq 4) \leq 0,003$. Ewenn a donc raison.

Question 7 : (1 point)

La loi de la variable aléatoire X donnant le numéro de la face obtenu est définie par le tableau :

| | | | | |
|--------------|------|------|------|------|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $P(X = x_i)$ | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 |

Ainsi,

$$\begin{cases} E(X) = 1 \times 0,25 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,25 = 2,5. \\ E(X^2) = 1^2 \times 0,25 + 2^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,25 + 4^2 \times 0,25 = 7,5. \\ V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 1,25. \end{cases}$$

Posons, $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$, avec n le nombre de lancers.

Ainsi, $E(\bar{X}) = E(X)$ et $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$.

On cherche le nombre de tirage tel que $P(2 < \bar{R} < 3) \geq 0,99$, autrement dit,

$$\begin{aligned} P(-0,5 < \bar{X} - 2,5 < 0,5) \geq 0,99 &\Leftrightarrow P(|\bar{X} - 2,5| < 0,5) \geq 0,99 \\ &\Leftrightarrow -P(|\bar{X} - 2,5| < 0,5) \leq -0,99 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(|\bar{X} - 2,5| < 0,5) \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow P(|\bar{X} - 2,5| \geq 0,5) \leq 0,01. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Tchebychev, on obtient : $P(|\bar{X} - E(X)| \geq 0,5) \leq \frac{1,25}{n \times 0,5^2}$.

Par ailleurs, $\frac{1,25}{n \times 0,5^2} \leq 0,01$ ce qui implique $n \geq \frac{1,25}{0,0025}$, soit $n \geq 500$. D'où le résultat.

Question 8 : (1 point)

Soit $f(x) = \cos(x)$.

\rightsquigarrow On considère la fonction g définie par $g(x) = \cos(x) - x$.

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} : $x \rightarrow \cos(x)$ et $x \rightarrow -x$.

Ainsi, $g'(x) = -\sin(x) - 1$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-2 \leq -\sin(x) - 1 \leq 0$.

Autrement dit, Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \leq 0$ ce qui revient à dire que g est décroissante sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, d'après le théorème des

gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$.

Dès lors, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\cos(x)}{x} - 1 \right) = -\infty$.

En utilisant le même raisonnement, on obtient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{\cos(x)}{x} - 1 \right) = +\infty$.

On en déduit alors de tableau de variation de g .

| | | |
|------------------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | - | |
| variation de g | $+\infty$ | $-\infty$ |

\rightsquigarrow La fonction g est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R} .

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. Autrement dit, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

\rightsquigarrow Si pour tout entier naturel n , $u_n \geq \alpha$ alors $g(u_n) \leq 0$. Autrement dit, $u_{n+1} \leq u_n$.

(u_n) est décroissante et minorée par α , elle est donc convergente selon le théorème de convergence monotone.

Si pour tout entier naturel n , $u_n \leq \alpha$ alors $g(u_n) \geq 0$. Autrement dit, $u_{n+1} \geq u_n$.
 (u_n) est croissante et majorée par α , elle est donc convergente selon le théorème de convergence monotone.
 Supposons que (u_n) est convergente et posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 f est continue sur \mathbb{R} , de plus $u_{n+1} = f(u_n)$, donc selon le théorème du point fixe ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Autrement dit, $\ell = \alpha$.

Question 9 : (1 point)

Posons : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x+1)$. Ainsi, $u(x) = x+1$ et $v'(x) = \frac{1}{x+1}$.

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \ln(x+1) dx &= \int_0^1 u'(x)v(x) dx \\
 &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx \\
 &= [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \times \frac{1}{x+1} dx \\
 &= [2\ln(2) - \ln(1)] - \int_0^1 1 dx \\
 &= [2\ln(2) - \ln(1)] - [x]_0^1 \\
 &= 2\ln(2) - 1.
 \end{aligned}$$

Question 10 : (1 point)

$$y' = 2y + e^x. \quad (E)$$

L'équation différentielle homogène associée à (E) s'écrit sous la forme $y' = ay$ avec $a = 2$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donné par : $y_0(x) = Ce^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Cherchons à présent une solution particulière sous la forme $f(x) = ae^x + b$.

On sait que :

$$\begin{aligned}
 f'(x) - 2f(x) &= ae^x - 2ae^x - 2b \\
 &= -ae^x - 2b \\
 &= e^x.
 \end{aligned}$$

Donc, $-a = 1$ et $-2b = 0$. Ainsi, $f(x) = -e^x$ est une solution particulière de (E) .

En conséquence, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$S(x) = \underbrace{-e^x}_{\text{Solution particulière de (E)}} + \underbrace{Ce^{2x}}_{\text{Solutions de l'équation homogène associée à (E)}}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$