Exercice 1

Utiliser la définition du nombre dérivé pour les questions suivantes.

1. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x - 1$.
   Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre -2 et $-2+h$ est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} &= \frac{-4(-2+h)-1-7}{h}\\ &= \frac{8-4h-1-7}{h}\\ &= \frac{-4h}{h}\\ &= -4.\end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = -4$. Donc, f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -4$.

2. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - 2$.
   Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre 5 et $5+h$ est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} &= \frac{\frac{1}{5+h} - 2 - \frac{-9}{5}}{h} \qquad \text{avec } h \neq -5\\ &= \frac{\frac{1}{5+h} - \frac{1}{5}}{h}\\ &= \left(\frac{1}{5+h} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{h}\\ &= \frac{5-5-h}{5h(5+h)}\\ &= \frac{-\cancel{h}}{5\cancel{h}(5+h)}\\ &= \frac{-1}{5(5+h)}\end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = -\dfrac{1}{25}$. Donc, f est dérivable en 5 et $f'(5) = -\dfrac{1}{25}$.

3. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.
   Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre -1 et $-1+h$ est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2-1}{h}\\ &= \frac{1^2-2h+h^2-1}{h}\\ &= \frac{-2h+h^2}{h}\\ &= \frac{\cancel{h}(-2+h)}{\cancel{h}}\\ &= -2+h.\end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -2$. Donc, f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -2$.

4. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3}$.

Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et $1+h$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{\frac{\sqrt{h+1}}{3}-\frac{1}{3}}{h} \\
&= \frac{\sqrt{h+1}-1}{3h} \\
&= \frac{\sqrt{h+1}^2-1^2}{3h(\sqrt{h+1}+1)} \\
&= \frac{h+1-1}{3h(\sqrt{h+1}+1)} \\
&= \frac{\cancel{h}}{3\cancel{h}(\sqrt{h+1}+1)} \\
&= \frac{1}{3(\sqrt{h+1}+1)}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{6}$. Donc, f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{6}$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

1. Pour tout $h \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{g(3+h)-g(3)}{h} &= \frac{(3+h)^2-4(3+h)+5-2}{h} \quad \text{avec } f(3)=2 \\
&= \frac{9+6h+h^2-12-4h+5-2}{h} \\
&= \frac{2h+h^2}{h} \\
&= \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} \\
&= 2+h.
\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(3+h)-g(3)}{h} = 2$, donc g est dérivable en 3 et $g'(3) = 2$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$

1. Pour tout réel $h \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{3(2+h)^2+5(2+h)+4-26}{h} \quad \text{avec } f(2)=26 \\
&= \frac{3(4+4h+h^2)+10+5h+4-26}{h} \\
&= \frac{12+12h+3h^2+10+5h-22}{h} \\
&= \frac{17h+3h^2}{h} \\
&= \frac{\cancel{h}(17h+3)}{\cancel{h}} \\
&= 3h+17.
\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 17$, donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 17$.

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

1. Pour tout h tel que $h \neq 0$ et $1+h > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 1+h-\frac{1}{1+h} \\ &= \frac{(1+h)^2-1}{1+h} \\ &= \frac{1+2h+h^2-1}{1+h} \\ &= \frac{2h+h^2}{1+h}. \end{aligned}$$

2. Pour tout h tel que $h \neq 0$ et $1+h > 0$, le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{\frac{2h+h^2}{1+h}-0}{h} \\ &= \frac{2h+h^2}{h(1+h)} \\ &= \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}(1+h)} \\ &= \frac{2+h}{1+h}. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Exercice 5

Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = 2\sqrt{x-3}$ n'est pas dérivable en 3.
Soit $h > 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre 3 et $3+h$ est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \frac{2\sqrt{3+h-3}-0}{h} \\ &= \frac{2\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{2\cancel{\sqrt{h}}}{\cancel{\sqrt{h}}\times\sqrt{h}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} \notin \mathbb{R}$, donc f n'est pas dérivable en 3.

Exercice 6

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x$ dérivable en 4.
Soit $h > 0$. Le taux d'accroissement de la fonction f entre 4 et $4+h$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \frac{(4+h)^3-(4+h)-60}{h} \\
&= \frac{64+48h+12h^2+h^3-4-h-60}{h} \\
&= \frac{48h+12h^2+h^3-h}{h} \\
&= \frac{47h+12h^2+h^3}{h} \\
&= \frac{\cancel{h}(47+12h+h^2)}{\cancel{h}} \\
&= 47+12h+h^2.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = 47$, donc f est dérivable en 4 et $f'(4) = 47$.

Exercice 7

Soit une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(4) = -1$ et $g'(4) = 2$.
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 4, est donnée par :

$$\begin{aligned}
y &= g'(4)(x-4)+g(4) \\
&= 2(x-4)-1 \\
&= 2x-8-1 \\
&= 2x-9.
\end{aligned}$$

Exercice 8

Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(2) = 17$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2\,;\,7)$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2, est donnée par :

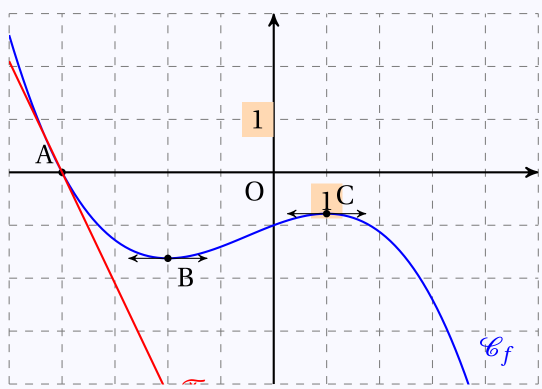
$$\begin{aligned}
y &= f'(2)(x-2)+f(2) \\
&= 17(x-2)+7 \\
&= 17x-34+7 \\
&= 17x-27.
\end{aligned}$$

Exercice 9

La fonction f représentée ci-contre est dérivable pour tout nombre a.

1. Selon la représentation graphique, $f'(-2) = 0$ et $f'(1) = 0$, car les deux tangentes aux points B et C sont horizontales.
   $f'(-4) = \dfrac{2-(-2)}{-5-(-3)} = \dfrac{4}{-2} = -2.$
2. L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -4, est donnée par :

$$\begin{aligned}
y &= f'(-4)(x-(-4))+f(-4) \\
&= -2(x+4)+0 \\
&= -2x-8.
\end{aligned}$$



Exercice 10

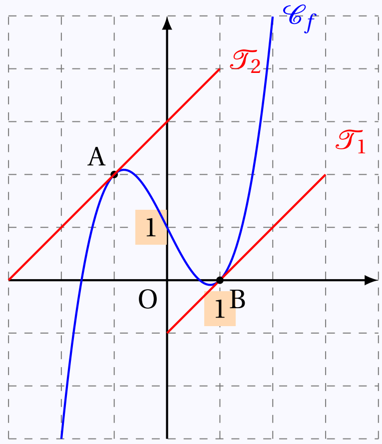
La fonction f représentée ci-contre est dérivable pour tout nombre a.

1. Selon la représentation graphique, $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{2}{2} = 1$.
2. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_1$ à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 1, est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(1)(x-1)+f(1) \\ & = & 1(x-1)+0 \\ & = & x-1. \end{array}$$

3. Selon la représentation graphique, $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = \frac{4}{4} = 1$.
4. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_2$ à $\mathscr{C}_f$ au point 1 d'abscisse -1, est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(-1)(x+1)+f(-1) \\ & = & 1(x+1)+2 \\ & = & x+3. \end{array}$$



Exercice 11

La courbe ci-contre représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. Selon la représentation graphique,
$f(0) = -2$; $f(2) = -4$; $f'(0) = \frac{-4}{2} = -2$;
$f(4) = -2$ et $f'(4) = \frac{4}{2} = 2$.
2. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_1$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(0)(x-0)+f(0) \\ & = & -2x-2. \end{array}$$

3. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_2$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4, est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(4)(x-4)+f(4) \\ & = & 2(x-4)-2 \\ & = & 2x-10. \end{array}$$

4. On a : $f(0) = c = -2$. Par ailleurs,

$$\begin{cases} f(2) = -4 \\ f(4) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b-2 = -4 \\ 16a+4b-2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b = -2 \\ 16a+4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = -1 \\ 4a+b = 0 \end{cases}.$$

Par soustraction des deux égalités, membre par membre, on obtient : $2a = 1$. Soit, $a = \frac{1}{2}$.
Et par substitution, dans la deuxième équation, on obtient : $b = -4a = -4 \times \frac{1}{2} = -2$.

5. Pour déterminer les abscisses des points A et B, il suffit de résoudre l'équation $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 = 0$.
Le discriminant de cette équation est égal à :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-2) = 8$.
Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :
$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2 \times \frac{1}{2}} = 2 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2 \times \frac{1}{2}} = 2 + 2\sqrt{2}$.
Ainsi, x_1 et x_2 sont respectivement les abscisses de A et B.