Lycée Évariste Galois	**AP**	1re Spé
2024/2025	**Corrigés : Dérivation & Application de la dérivation**	maths-mde.fr

Rappels

Fonction	constante	$ax+b$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$
Dérivée	0	a	nx^{n-1}	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Fonction	$u+v$	$k.u$	$u\times v$	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$
Dérivée	$u'+v'$	$k.u'$	$u'v+uv'$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f'(x)=2x$.
2. $f'(x)=6x-1$.
3. $f'(x)=-10x+\frac{1}{2}$.
4. $f'(x)=x^2+2$.
5. $f'(x)=-6x^2+\frac{3}{2}x+7$.
6. $f'(x)=\frac{8}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x$.
7. $f'(x)=-4\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{4}{x^2}$.
8. $f'(x)=2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)-2x=-\frac{2}{x^2}-2x$.
9. $f'(x)=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-6\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^2}$.
10. $f'(x)=2x\times\sqrt{x}+x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
11. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(x^2+1)+(\sqrt{x}+2)\times 2x$.
12. $f'(x)=(2x-2)(x-\sqrt{x})+(x^2-2x+5)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.
13. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-2)+(\sqrt{x}+1)\times 2x$.
14. $f'(x)=2\times2\times(2x-5)=4(2x-5)$.
15. $f'(x)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}x+3\right)=-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)$.
16. $f'(x)=2\times(2x-1)(x^2-x+1)$.
17. $f'(x)=2\times\left(6x+\frac{1}{x^2}\right)\times\left(3x^2-\frac{1}{x}+7\right)$.
18. $f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}$.
19. $f'(x)=-\frac{3}{(3x-7)^2}$.
20. $f'(x)=3\times\left(-\frac{5}{(5x+10)^2}\right)=-\frac{15}{(5x+10)^2}$.
21. $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
22. $f'(x)=-\frac{(8x-1)}{(4x^2-x-3)^2}$.
23. $f'(x)=-4\times\left(-\frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\right)=\frac{8x+4}{(x^2+x+1)^2}$.
24. $f'(x)=\frac{1\times(x+1)-(x-1)\times1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$.
25. $f'(x)=\frac{-2\times(4x+3)-(-2x+5)\times4}{(4x+3)^2}=\frac{-26}{(4x+3)^2}$.
26. $f'(x)=\frac{2x\times(x-2)-(x^2+1)\times1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$.
27. $f'(x)=\frac{4x(x^2+7)-(2x^2-3)\times(x^2+7)}{(x^2+7)^2}$
$=\frac{4x^3+28x-4x^3+6x}{(x^2+7)^2}=\frac{34x}{(x^2+7)^2}$.
28. $f'(x)=\frac{(2x-2)(3x^2+4x+7)-(x^2-2x+5)(6x+4)}{(3x^2+4x+7)^2}$
$=\frac{10x^2-16x-34}{(3x^2+4x+7)^2}$.
29. $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(2x+1)-\sqrt{x}\times2}{(2x+1)^2}$.

Exercice 2

L'altitude (en m) d'une fusée de détresse tirée en mer, t secondes après son départ, est donnée par $h(t)=39{,}2t-4{,}9t^2$.

1. $h(8)=0$.

2. On a $h'(t) = 39,2 - 9,8t$ qui s'annule pour $t = \dfrac{39,2}{9,8} = 4$.

t	0		4		8
Signe de $h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	↗	78,4	↘	0

Ainsi, la hauteur maximale atteinte sera de $h(4) = 78,4$ m.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 12$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. $f'(x) = -3x^2 + 18x - 24$.
   Le discriminant du trinôme $-3x^2 + 18x - 24$ est égal à $\Delta = 18^2 - 4 \times (-3) \times (-24) = 36 > 0$.
   Δ étant strictement positif, $f'(x)$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-18-6}{-6} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-18+6}{-6} = 2$.
   De plus, $f'(x)$ est du signe opposé de $a = -3$ entre les deux racines et du signe du coefficient principal ailleurs.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-8	↗	-4	↘	

2. $y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow y = -6 + 3(x-3) \Leftrightarrow y = 3x - 15$.
3. Cela revient à déterminer les x tels que $f'(x) = -9 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 15 = 0$. (E)
   Le discriminant de l'équation (E) est égal à $\Delta = 18^2 - 4 \times (-3) \times (-15) = 144$.
   Δ étant strictement positif, cette équation admet deux solutions : $\dfrac{-18-12}{-6} = 5$ et $\dfrac{-18+12}{-6} = 1$.
   Ainsi, ce sont les points d'abscisse 5 et 1 conviennent.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

2. f est paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout x,
   $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$.

1. $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\times(x-2)-(x^2-2x+1)\times 1}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.
   Pour déterminer le signe de x^2-4x+3, il suffit de calculer le discriminant : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=4$.
   Δ étant strictement positif, $f'(x)$ admet deux racines : $x_1=\dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2}=3$.
   De plus, $f'(x)$ est du signe opposé de $a=1$ entre les deux racines et du signe du coefficient principal ailleurs.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	||	$\searrow$	4	$\nearrow$	

2. On étudie le signe de $f(x)-x=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}-x=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}-\dfrac{x(x-2)}{(x-2)}=\dfrac{x^2-2x+1-x^2+2x}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
1	$+$	||	$+$
$x-2$	$-$	||	$+$
Signe de $f(x)-x$	$-$	||	$+$
Position relative	C_f en dessous de d	||	C_f au dessus de d

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-6x}$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$, car c'est le quotient deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(2x^2-6x)-(x^2-2x+1)(4x-6)}{(2x^2-6x)^2}\\ &= \frac{4x^3-12x^2-4x^2+12x-4x^3+6x^2+8x^2-12x-4x+6}{(2x^2-6x)^2}\\ &= \frac{-2x^2-4x+6}{(2x^2-6x)^2}. \end{aligned}$$

   Pour déterminer le signe de $-2x^2-4x+6$ il suffit de calculer le discriminant : $\Delta=64$.
   Δ étant strictement positif, $f'(x)$ admet deux racines : $x_1=\dfrac{4-8}{-4}=1$; $x_2=\dfrac{4+8}{-4}=-3$.
   De plus, $f'(x)$ est du signe opposé de $a=-2$ entre les deux racines et du signe du coefficient principal ailleurs.

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$-2x^2-4x+6$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$(2x^2-6x)^2$		$+$		$+$	$\|$	$+$		$+$	$\|$	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

2. D'après le tableau de variations, f admet un minimum positif sur $]-\infty;0[$.
   Donc $f(x)$ est bel et bien positif pour tout $x<0$.

Exercice 7

$C'(v) = 0{,}06 + 150 \times \left(-\dfrac{1}{v^2}\right) = \dfrac{0{,}06v^2 - 150}{v^2}$.

$C'(v) = 0 \Leftrightarrow v_1 = \dfrac{0-6}{0{,}12} = -50$; $v_2 = \dfrac{0+6}{0{,}12} = 50$.

$C'(v)$ est du signe opposé de $a = 0{,}06$ entre les deux racines et du signe du coefficient principal ailleurs. Ainsi,

v	20		50		130
Signe de $C'(v)$		$-$	0	$+$	
$C(v)$	$8{,}7$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$8{,}95$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

1. $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$.
   $\Delta = 0$; $x_1 = \dfrac{-6}{2 \times 3} = -1$.
   « $f'(x)$ du signe de $a = 3$ et s'annule pour $x = -1$ ».

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

2. $f(-1) = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$. On peut en déduire que :
   — $f(x)$ est négatif sur $]-\infty;-1[$;
   — $f(x)$ est positif sur $]-1;+\infty[$;

Exercice 9

Si f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$ alors il existe au moins un x tel que $f'(x) \neq 0$.

Exercice 10

$f'(x) = 2ax + b$ qui est du 1er degré et qui s'annule pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

La dérivée s'annule donc en changeant de signe pour $x = -\dfrac{b}{2a}$:

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	