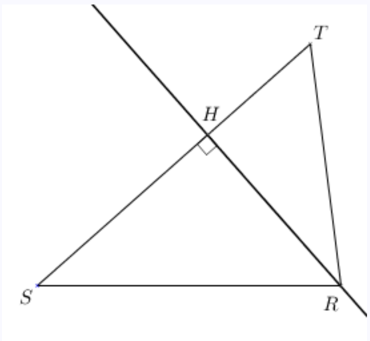
Lycée Évariste Galois	**AP**	1re Spé
2024/2025	**Corrigés : Produit Scalaire**	maths-mde.fr

Exercice 1

RST est un triangle tel que $RS = 5$ cm, $RT = 4$ cm et $TS = 6$ cm.



1. En utilisant la propriété suivante, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{ST} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}\|^2 - \|\overrightarrow{RS}\|^2 - \|\overrightarrow{ST}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(RT^2 - RS^2 - ST^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(16-25-36)\\ &= -\frac{45}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{RT} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RT}\|^2 - \|\overrightarrow{SR}\|^2 - \|\overrightarrow{RT}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(ST^2 - SR^2 - RT^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(36-25-16)\\ &= -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

2. Calculons d'abord $\left(\overrightarrow{SR},\overrightarrow{ST}\right)$.
   D'une part on a : $\overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{ST} = -\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{ST} = \frac{45}{2}$.
   D'autre part on a : $\overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{ST} = RS\times ST\times\cos\left(\overrightarrow{SR},\overrightarrow{ST}\right) = 5\times 6\times\cos\left(\overrightarrow{SR},\overrightarrow{ST}\right)$.
   Par conséquent, $30\cos\left(\overrightarrow{SR},\overrightarrow{ST}\right) = \frac{45}{2}$. Autrement dit, $\cos\left(\overrightarrow{SR},\overrightarrow{ST}\right) = \frac{3}{4}$. Soit, $\left(\overrightarrow{SR},\overrightarrow{ST}\right)\approx 41,4°$.

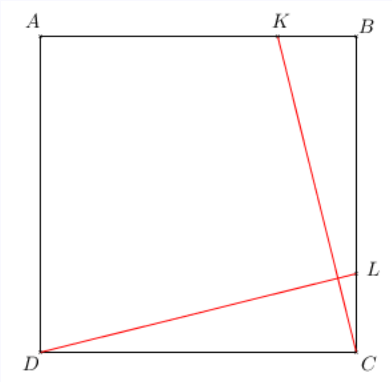
   Calculons à présent $\left(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RS}\right)$.
   D'une part on a : $\overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{SR}.\overrightarrow{RT} = \frac{5}{2}$.
   D'autre part on a : $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT} = RS\times RT\times\cos\left(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RS}\right) = 5\times 4\times\cos\left(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RS}\right)$.
   Par conséquent, $20\cos\left(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RS}\right) = \frac{5}{2}$. Autrement dit, $\cos\left(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RS}\right) = \frac{1}{8}$. Soit $\left(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RS}\right)\approx 82,8°$.
   Par ailleurs, dans un triangle la somme des angles vaut 180°. Ainsi, $\left(\overrightarrow{TS},\overrightarrow{TR}\right)\approx 55,8°$.
3. On a $\overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SH}.\overrightarrow{ST} = SH\times ST$. Ainsi, $6SH = \frac{45}{2}$. D'où $SH = \frac{15}{4}$ cm.
   On sait que H appartient au segment $[ST]$. Ainsi, $HT = ST - SH = 6 - \frac{15}{4} = \frac{9}{4}$

Dans le triangle RSH rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} RS^2 = RH^2 + HS^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 25 = RH^2 + \frac{225}{16} \\ &\Leftrightarrow \quad RH^2 = \frac{175}{16} \\ &\Leftrightarrow \quad RH = \frac{\sqrt{175}}{4} \text{ cm ou encore } RH = \frac{5\sqrt{7}}{4}\text{cm.} \end{aligned}$$

Exercice 2

$ABCD$ est un carré. On place K tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.



1. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{KC} &= \left(\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{16}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{4}AB^2 + 0 + 0 - \frac{1}{4}BC^2 \quad (*) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$(*)$: (DC) et (BC) d'une part et (BC) et (AB) d'autres part sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
De plus, $ABCD$ étant un carré alors $AB = BC$. Par conséquent Les droites (DL) et (KC) sont bel et bien perpendiculaires.

2. On remplace $\frac{3}{4}$ par une valeur λ. En utilisant la relation de Chasles, on obtient : $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DC} - \lambda\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Ainsi,

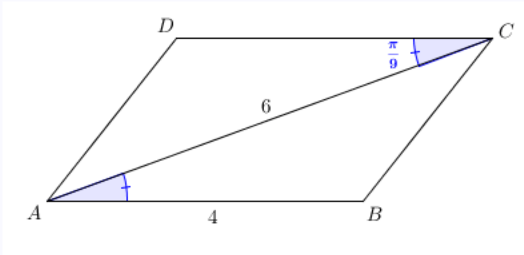
$$\begin{aligned} \overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{KC} &= \left(\overrightarrow{DC} - \lambda\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \lambda\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} - \lambda^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} \\ &= \lambda AB^2 + 0 + 0 - \lambda BC^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, les droites (DL) et (KC) sont perpendiculaires.

Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas de figure ci-dessous.

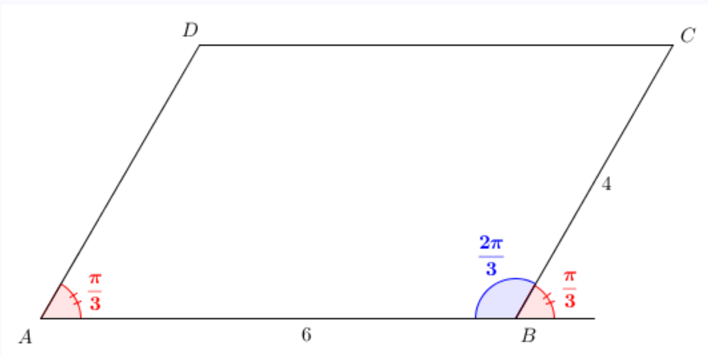
1. Les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Par conséquent les angles alternes-internes $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ ont la même mesure.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= 4 \times 6 \times \cos\frac{\pi}{9}\\ &\approx 22,55.\end{aligned}$$

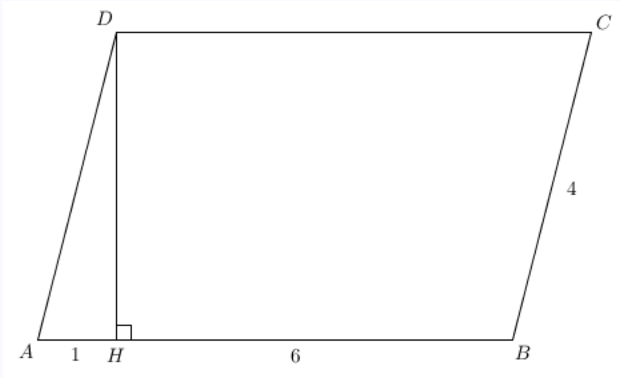
2. Les angles rouges sont correspondants et de même mesure puisque les droites (BC) et (AD) sont parallèles. Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\\ &= AB^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\\ &= AB^2+AB \times AD \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)\\ &= 36+24\cos\frac{\pi}{3}\\ &= 48.\end{aligned}$$



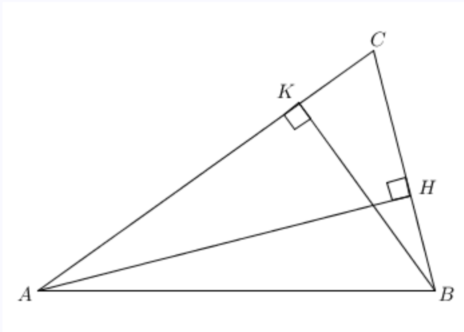
3. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DC}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}\\ &= AB \times AH + 0 + AB \times DC\\ &= 6 \times 1 + 36\\ &= 42.\end{aligned}$$



Exercice 4

ABC est un triangle. H et K sont respectivement les projetés orthogonaux de A et B sur (BC) et (AC).



D'une part, en utilisant le projeté orthogonal de B sur (AC) on a : $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{CA}$.
D'autre part, en utilisant le projeté orthogonal de A sur (BC) on a : $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}$.
Si l'angle $\widehat{ACB}$ est aigu alors les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont de même sens tout comme les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CH}$.
Ainsi $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{CA} = CK \times CA$ et $\overrightarrow{CB}.\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH} = CB \times CH$. Par conséquent, $CK \times CA = CB \times CH$.
Si l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus alors les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont de sens contraires tout comme les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CH}$.
Ainsi $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CK}.\overrightarrow{CA} = -CK \times CA$ et $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH} = -CB \times CH$. Par conséquent, $CK \times CA = CB \times CH$.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ on a $A(2;-1)$, $B(4;2)$, $C(4;0)$ et $D(1;2)$.

1. On a : $\overrightarrow{AB}(2;3)$ et $\overrightarrow{CD}(-3;2)$.
   Par conséquent, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2 \times (-3) + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$.
   Les droites (AB) et (CD) sont donc perpendiculaires.
2. On a $\overrightarrow{DB}(-3;0)$ et $\overrightarrow{BC}(0;-2)$
   Par conséquent, $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BC} = -3 \times 0 + (-2) \times 0 = 0$.
   Les droites (DB) et (BC) sont perpendiculaires.
3. $\overrightarrow{CB}(0;2)$ et $\overrightarrow{CD}(-3;2)$. Ainsi, $CB = 2$ et $CD = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
   Par conséquent, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \times (-3) + 2 \times 2 = 4$.
   Par ailleurs, on a également, $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = CB \times CD \times \cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$.
   Autrement dit, $4 = 2\sqrt{13}\cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.
   Par conséquent, $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) \approx 56,3°$.

Exercice 6

D'une part on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=24$.
D'autre part on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=16\sqrt{3}\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

Ainsi, $16\sqrt{3}\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=24 \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\\ &=16+48-32\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &=16. \end{aligned}$$

Par conséquent, $AC=4$.Autrement dit, le triangle ABC est donc isocèle en A.

Exercice 7

Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$ on a : $A\left(\dfrac{3}{2};-2\right)$, $B\left(-\dfrac{3}{2};4\right)$, $C(2;2)$ et $D(-2;0)$.

On a : $\overrightarrow{AC}\left(\dfrac{1}{2};4\right)$ et $\overrightarrow{DB}\left(\dfrac{1}{2};4\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$: $ACBD$ est par conséquent un parallélogramme.

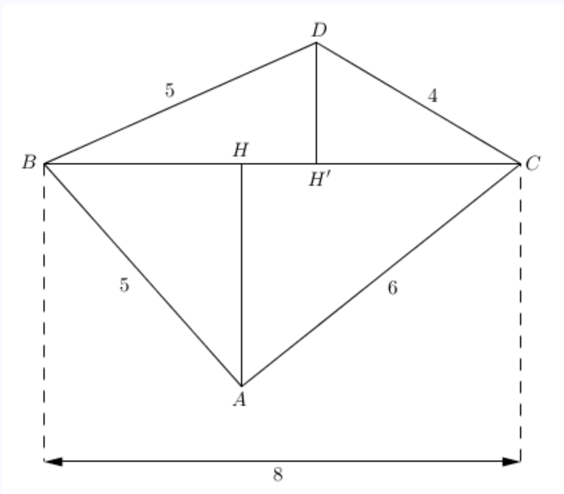
$\overrightarrow{AC}\left(\dfrac{1}{2};4\right)$ et $\overrightarrow{AD}\left(-\dfrac{7}{2};2\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\times\left(-\frac{7}{2}\right)+2\times 4\\ &=-\frac{7}{4}+8\\ &=\frac{25}{4}. \end{aligned}$$

$ACBD$ n'est donc pas un rectangle.
De plus, $AC=\sqrt{\dfrac{1}{4}+16}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ et $AD=\sqrt{\dfrac{49}{4}+4}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$. Autrement dit, $AC=AD$.
Le parallélogramme $ACBD$ possède deux côtés consécutifs de même longueur. Il s'agit donc d'un losange.

Exercice 8

On considère les points A, B, C et D tels que $BD=AB=5$, $AC=6$, $BC=8$, $CD=4$ et les points A et D sont de part et d'autre de la droite (BC). On note H et H' les projetés orthogonaux de A et D sur la droite (BC).



1. On applique le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC :

   - $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$
     $\Leftrightarrow 64=25+36-60\cos\widehat{BAC}$.

$\Leftrightarrow 3 = -60\cos\widehat{BAC}$
$\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = -\dfrac{1}{20}$.
Ainsi, $\widehat{BAC} \approx 92,9°$.
• $AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CA \times CB \times \cos\widehat{BCA}$
$\Leftrightarrow 25 = 64 + 36 - 96\cos\widehat{BCA}$
$\Leftrightarrow -75 = -96\cos\widehat{BCA}$
$\Leftrightarrow \cos\widehat{BCA} = \dfrac{75}{96}$
Ainsi, $\widehat{BCA} \approx 38,6°$.

- La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Donc $\widehat{CBA} \approx 48,5°$.
  On applique le théorème d' dans le triangle BDC :
  $BC^2 = DB^2 + DC^2 - 2DB \times DC \times \cos\widehat{BDC}$
  $64 = 25 + 16 - 40\cos\widehat{BDC}$
  $\Leftrightarrow 23 = -40\cos\widehat{BDC}$
  $\Leftrightarrow \cos\widehat{BDC} = -\dfrac{23}{40}$
  Ainsi, $\widehat{BDC} \approx 125,1°$.
  $BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2CB \times CD \times \cos\widehat{BCD}$
  $\Leftrightarrow 25 = 64 + 16 - 64\cos\widehat{BCD}$
  $\Leftrightarrow -55 = -64\cos\widehat{BCD}$
  $\Leftrightarrow \cos\widehat{BCD} = \dfrac{55}{64}$
  Ainsi, $\widehat{BCD} \approx 30,8°$.

- La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Donc $\widehat{CBD} \approx 24,1°$.
  Les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{CBA}$ sont adjacents. Ainsi, $\widehat{ABD} \approx 72,6°$.
  Les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BCA}$ sont adjacents. Ainsi, $\widehat{DCA} \approx 69,4°$.

2. • Calcul de BH : Dans le triangle BHA rectangle en H on a

$$\begin{aligned}\cos\widehat{HBA} = \frac{BH}{BA} &\Leftrightarrow \cos 48,5 = \frac{BH}{5}\\ &\Leftrightarrow BH = 5\cos 48,5\\ &\quad BH \approx 3,31.\end{aligned}$$

• Calcul de CH' : Dans le triangle CDH' rectangle en H' on a :

$$\begin{aligned}\cos\widehat{DCH'} = \frac{CH'}{CD} &\Leftrightarrow \cos 30,8 = \frac{CH'}{4}\\ &\Leftrightarrow CH' = 4\cos 30,8\\ &\Leftrightarrow CH' \approx 3,44.\end{aligned}$$

• Calcul de HH' : Les points B, H, H' et C sont alignés dans cet ordre donc

$$\begin{aligned}HH' &= BC - BH - CH';\\ &\approx 1,25.\end{aligned}$$

Exercice 9

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ on considère les points $A(3;2)$ et $B(-5;-3)$.

1. Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-8;-5)$.

On considère un point $M(x;y)$ du plan. On a alors $\overrightarrow{AM}(x-3;y-2)$.

$$\begin{aligned} M\in(AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow -8(y-2)-(x-3)\times(-5)=0\\ &\Leftrightarrow -8y+16+5x-15=0\\ &\Leftrightarrow 5x-8y+1=0.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc $5x-8y+1=0$. Un vecteur normal à cette droite est donc $\vec{n}(5;-8)$.

2. Un vecteur directeur de la droite (d) est donc $\vec{n}(5;-8)$.
Soit $M(x;y)$ un point du plan. $\overrightarrow{CM}\left(x+\dfrac{7}{2};y-\dfrac{7}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} M\in(d) &\Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{CM} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow 5\left(y-\frac{7}{2}\right)-(-8)\left(x+\frac{7}{2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow 5y-\frac{35}{2}+8x+28=0\\ &\Leftrightarrow 8x+5y+\frac{21}{2}=0.\end{aligned}$$

3. Déterminons les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et de la droite (AB). Elles sont solution du système :

$$\begin{aligned}\begin{cases}5x-8y+1=0\\ 8x+5y+\dfrac{21}{2}=0\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}5x-8y=-1 & \Leftrightarrow \quad (1)\\ 8x+5y=-\dfrac{21}{2} & \Leftrightarrow \quad (2)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}5x-8y=-1\\ -89y=\dfrac{89}{2} & 8(1)-5(2)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}\\ 5x=8y-1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}\\ x=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Le point d'intersection des droites (AB) et (d) est donc $D\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. Le point D est donc le milieu du segment $[CC']$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\begin{cases}-1=\dfrac{x_{C'}-\frac{7}{2}}{2}\\ -\dfrac{1}{2}=\dfrac{y_{C'}+\frac{7}{2}}{2}\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}-2=x_{C'}-\dfrac{7}{2}\\ -1=y_{C';}+\dfrac{7}{2}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x_{C'}=\dfrac{3}{2}\\ y_{C'}=-\dfrac{9}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

Donc le point C' a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$.

Exercice 10

On considère un segment $[AB]$ de longueur 5 cm.

1. On appelle H le point du segment $[AB]$ tels que $AH = 2$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 10 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right) = 10\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HM} = 10\\ &\Leftrightarrow AB\times AH+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HM} = 10\\ &\Leftrightarrow 10+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HM} = 10\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HM} = 0.\end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des points cherché est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H.

2. $|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}| = 20 \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN} = -20\\ \text{ou}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN} = 20\end{cases}$.

   On appelle I le point du segment $[AB]$ tel que $AI = 4$ et J le point de la droite (AB) n'appartenant pas au segment $[AB]$ tel que $AJ = 4$.

   En reprenant un raisonnement identique à celui mené dans la question précédente pour chacun des produits scalaires, on montre que l'ensemble cherché est la réunion des droites perpendiculaires à la droite (AB) passant par I ou par J.