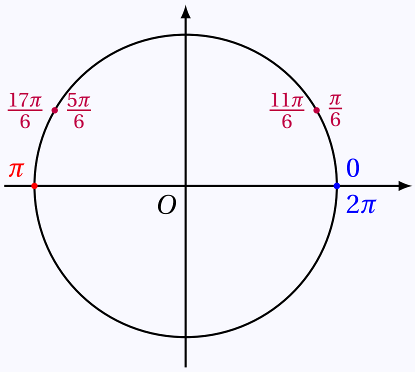
Lycée Évariste Galois	**AP**	1re Spé
2024/2025	**Révision**	maths-mde.fr

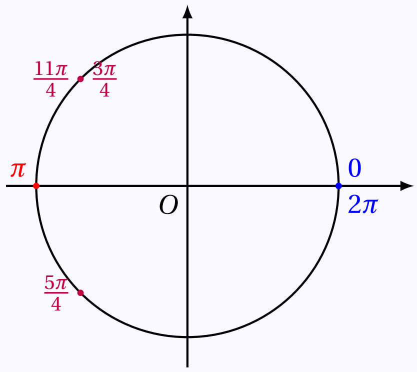
Exercice 1

On sait qu'un produit est nul si au moins l'un des facteurs est nul. Ainsi,

$$\begin{aligned}(2\sin(x)-1)\left(2\cos(x)+\sqrt{2}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin(x)-1=0 \text{ ou } 2\cos(x)+\sqrt{2}=0\\ &\Leftrightarrow \quad 2\sin(x)=1 \text{ ou } 2\cos(x)=-\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \quad \sin(x)=\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ et $\frac{17\pi}{6}$ sont les solutions de l'équation $\sin(x)=\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\,;\,3\pi[$.
$\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{11\pi}{4}$ sont les solutions de l'équation $\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'intervalle $[0\,;\,3\pi[$.





Par conséquent, $S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6};\frac{17\pi}{6};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{11\pi}{4}\right\}$.

Exercice 2

On souhaite résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$4\cos^2 x-2(1+\sqrt{3})\cos x+\sqrt{3}=0. \qquad \textbf{(1)}$$

1. On pose $X=\cos x$ avec $X\in[-1\,;\,1]$.
   (a) L'équation du second degré est équivalente à (**1**), est la suivante :

   $$4X^2-2(1+\sqrt{3})X+\sqrt{3}=0. \qquad \textbf{(2)}$$

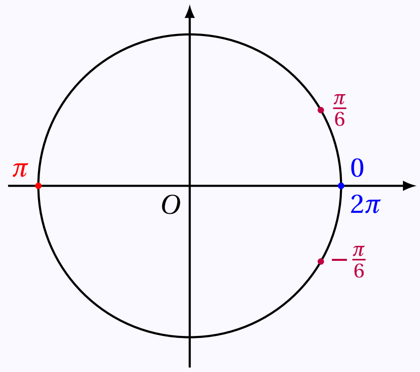
   (b) Le discriminant de l'équation (**2**) est égal à :

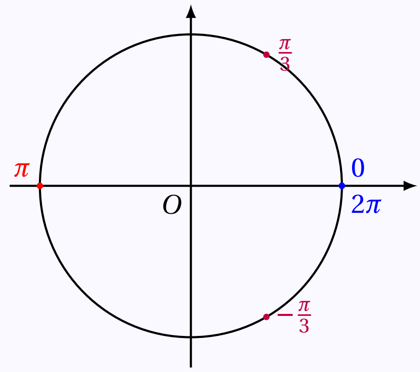
   $$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= \left[-2(1+\sqrt{3})\right]^2-4\times4\times\sqrt{3}\\ &= 4(1+2\sqrt{3}+3)-16\sqrt{3}\\ &= 16+8\sqrt{3}-16\sqrt{3}\\ &= 16-8\sqrt{3}\\ &= 4(4-2\sqrt{3})\\ &= 4\left(1-2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2\right)\\ &= 4(1-\sqrt{3})^2.\end{aligned}$$

(c) Δ étant strictement positif, l'équation (**2**) admet deux solutions :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{2(1+\sqrt{3}) - \sqrt{4(1-\sqrt{3})^2}}{8} = \dfrac{2+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2}{8} = \dfrac{1}{2} \\ X_2 = \dfrac{2(1+\sqrt{3}) + \sqrt{4(1-\sqrt{3})^2}}{8} = \dfrac{2+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, on sait que $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.





Ainsi, $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (**1**) dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
Et, $S' = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi; -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{3} + +2k\pi,\ \text{où}\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (**1**) dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Une entreprise d'impression de photos propose un abonnement annuel à ses clients qui coute 45 euros. Avec cet abonnement, le client paye 5 centimes par photo qu'il veut imprimer. On note u_n le prix que paye le client pour l'abonnement et l'impression de n photos.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,05n + 45$.
2. $u_{15} = 0,05 \times 15 + 45 = 45,75$. Ainsi, pour 15 photos, le client paye 45,75 €.
3. Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned} u_n = 98 &\Leftrightarrow 0,05n + 45 = 98 \\ &\Leftrightarrow 0,05n = 98 - 45 \\ &\Leftrightarrow 0,05n = 53 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{53}{0,05} \\ &\Leftrightarrow n = 1\,060. \end{aligned}$$

Ainsi, avec 98 euros, le client peut imprimer 1 060 photos.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6$.

1. f est une fonction polynôme de degré 4, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 4x\left(x^2 - \frac{3}{2}\right) = 4x\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

2. Le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Le sens de variation de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	

4. Il est assez aisé d'obtenir : $f(1)=4$ et $f'(1)=-2$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1, est donnée par :

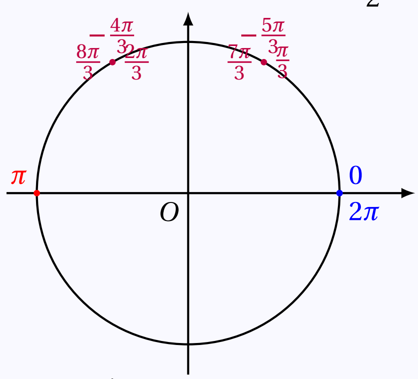
$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1) \\ &= -2(x-1)+4 \\ &= -2x+6. \end{aligned}$$

Exercice 5

On sait qu'un produit est nul si au moins l'un des facteurs est nul. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left(2\sin(x)-\sqrt{3}\right)(2\cos(x)-1)=0 &\Leftrightarrow 2\sin(x)-\sqrt{3}=0 \text{ ou } 2\cos(x)-1=0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin(x)=\sqrt{3} \text{ ou } 2\cos(x)=1 \\ &\Leftrightarrow \sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(x)=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ et $\frac{8\pi}{3}$ sont les solutions de l'équation $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,3\pi[$.
$-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ et $\frac{8\pi}{3}$ sont les solutions de l'équation $\cos(x)=\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,3\pi[$.



Par conséquent, $S=\left\{-\frac{5\pi}{3};-\frac{4\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$. est l'ensemble de solutions de cette équation sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,3\pi[$:

Exercice 6

1. $A=\cos(3\pi)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=1.$

2. $B=\sin(-\pi)+\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+0=\frac{1-\sqrt{2}}{2}.$

Exercice 7

1. $A = \sin(x-\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) + \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) = 0.$
2. $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{8\pi}{2}\right) = \cos(x) + \sin(x) + \cos(x) + \cos(x) = 3\cos(x) + \sin(x).$

Exercice 8

On peut montrer que deux suites sont égales, en montrant qu'elles ont le même premier terme et qu'elles suivent la même relation de récurrence.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - 1$.
On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$. On veut montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

1. $u_0 = 2^0 - 1 = 0,\ u_1 = 2^1 - 1 = 1$ et $u_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.
   $v_0 = 0,\ v_1 = 2u_0 + 1 = 1$ et $u_2 = 2u_1 + 1 = 2 + 1 = 3$.
2. Pour tout entier n, on a :
   $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1 = 2 \times 2^n - 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2v_n + 1$.
3. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont identiques.

Exercice 9

Aurélien décide de partir de Paris et d'aller à Stockholm à vélo. Il doit parcourir 2 000 km. Le premier jour, il parcourt 20 km. Chaque jour, il parcourt 5 km de plus que le jour précédent. On note u_n la distance parcourue le n-ième jour. Ainsi, $u_1 = 20$.

1. Il parcourt 25 km deuxième jour.
2. Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 5$. Il s'agit d'une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = 20$.
   Ainsi, $u_n = u_1 + 5(n-1) = 20 + 5(n-1) = 5n + 15$.
3. On note s_n la distance parcourue au total depuis le début du parcours, le n-ième jour au soir.
   (a) $s_1 = u_1 = 20$ et de $s_2 = u_1 + u_2 = 45$.
   (b) $s_n = u_1 + \cdots + u_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2} = n\dfrac{35 + 5n}{2}$.
4. A ce rythme, Aurélien arrivera au bout de 25 jours.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

1. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Posons,

   $u(x) = x + 3$ $\qquad$ $v(x) = x - 2$
   $u'(x) = 1$ $\qquad$ $v'(x) = 1$.

   Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{1(x-2) - 1 \times (x+3)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{-5}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) < 0$. Le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$

3. Le sens de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

4. Il est assez aisé d'obtenir : $f(0) = -\dfrac{3}{2}$ et $f'(1) = -\dfrac{5}{4}$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1, est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0)+f(0) \\ &= -\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 2x - 3$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme de degré 3. Ainsi,

$$f'(x) = 3x^2 + 2.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) $f(1) = 1^3 + 2 \times 1 - 3 = 0$.
   (b) On déduire alors que : $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;\,1]$.

3. On a $f'(1) = 5$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1, est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1) \\ &= 5(x-1)+0 \\ &= 5x-5. \end{aligned}$$

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x + 2$.
   (a) $g(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$
   (b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme de degré 3. Ainsi, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.
   'équation $g'(x) = 0$ admet alors deux solutions : -1 et 1. De plus, $g(-1) = 4$ et $g(1) = 0$.
   Par ailleurs, $g'(x)$ est un trinôme du second degré, donc il est du signe opposé du coefficient principal entre les deux racines et du du signe du coefficient principal ailleurs. On obtient alors le sens de variation de f.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

5. On remarque que : $f(x) - (5x-5) = x^3 + 2x - 3 - (5x-5) = g(x)$.
   En utilisant la question précédente, on peut déduire que : pour tout $x \in]-\infty\,;\,-2]$; $g(x) \leqslant 0$ et pour tout $x \in [-2\,;\,+\infty[$; $g(x) \geqslant 0$.
   Autrement dit, sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2]$, $\mathscr{C}$ est située en-dessous $\mathscr{T}$ et sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$ $\mathscr{C}$ est située en-dessus $\mathscr{T}$

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{27}{x}$.

1. f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, $f'(x) = x - \dfrac{27}{x^2} = \dfrac{x^3 - 27}{x^2}$.

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(x-3)(x^2+3x+9) &= x^3+3x^2+9x-3x^2-9x-27\\ &= x^3-27.\end{aligned}$$

   (b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9) \Leftrightarrow x-3=0 \text{ ou } x^2+3x+9=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x^2+3x+9=0.\ (*)$
   Le discriminant de l'équation (*) est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 1 \times 9 = -27$.
   Δ étant négatif, le trinôme x^2+3x+9 est du même signe que le coefficient principal, soit 1. Ainsi,

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+3x+9		$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f		↘	$\|\|$	↘	$\dfrac{27}{2}$	↗	

3. On a : $f(1) = \dfrac{55}{2}$ et $f'(1) = -26$. Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1)\\ &= -26(x-1)+27,5\\ &= -26x+53,5.\end{aligned}$$

4. Selon le tableau de variation, $\dfrac{27}{2}$ est le minimum atteint par f sur $[0\,;\,+\infty[$.

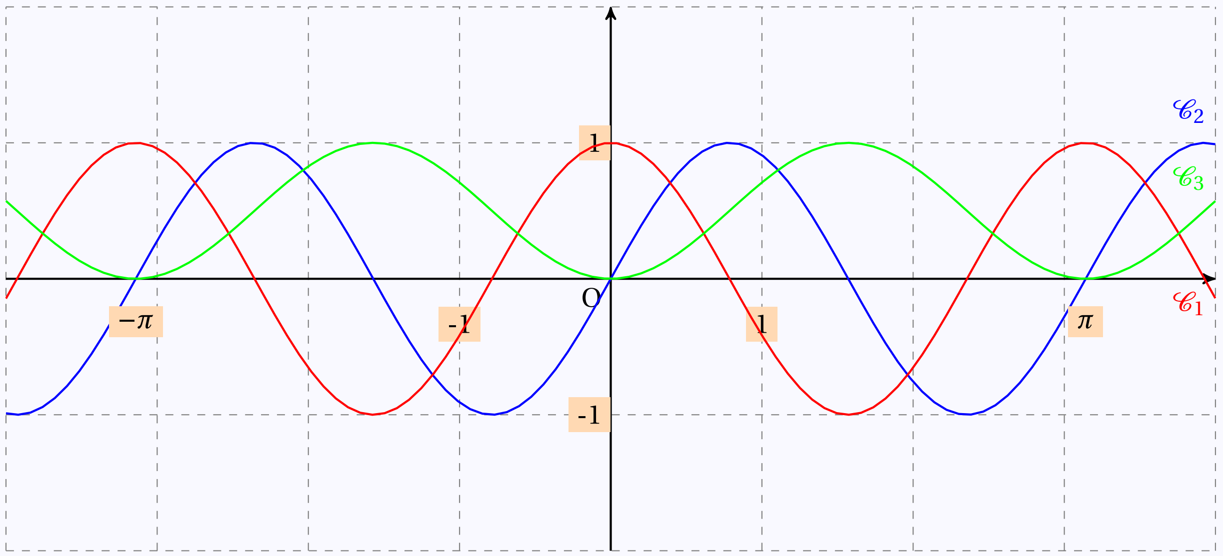
5. Il est assez aisé d'obtenir : $f(1) = \dfrac{55}{2}$ et $f(4) = \dfrac{59}{4}$. Ainsi, $\dfrac{55}{2}$ est le maximum de f sur $[1\,;\,4]$.

6. Lorsque $x \in [2\,;\,4]$; $f(x) \in \left[\dfrac{27}{2}\,;\,\dfrac{31}{2}\right]$.

Exercice 13

— La fonction $x \longrightarrow \cos(2x)$ est paire, elle est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. De plus, $\cos(0) = 1$. Par conséquent, c'est la courbe $\mathscr{C}_1$ qui représente le cosinus.

— La fonction $x \longrightarrow \sin(2x)$ est impaire, elle est donc symétrique par rapport à l'origine du repère. De plus, $\sin(0) = 0$. Par conséquent, c'est la courbe $\mathscr{C}_2$ qui représente le sinus.



Exercice 14

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x)\sin(x)$.

1. Le domaine de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.
   De plus, $g(-x) = \cos(-x)\sin(-x) = \cos(x) \times (-\sin(x)) = -\cos(x)\sin(x) = -g(x)$.
   Par conséquent, g est impaire. Cela signifie que la courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'origine.
2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$. Ainsi,
   $$g(x+\pi) = \cos(x+\pi)\sin(x+\pi) = (-\cos(x)) \times (-\sin(x)) = \cos(x)\sin(x).$$
   Dès lors, g est π-périodique.
3. C'est la courbe $\mathscr{C}_2$ qui représente de la fonction g, car c'est la seule courbe qui représente une fonction π-périodique. La courbe $\mathscr{C}_1$ représente une fonction 2π-périodique et la courbe $\mathscr{C}_3$ représente une fonction $\dfrac{\pi}{2}$-périodique