Lycée Évariste Galois	**AP**	1re Spé
2024/2025	**Suites arithmétiques** **Suites géométriques**	maths-mde.fr

Exercice 1

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 5$.

1. $U_2 = U_0 + 2r = 12$, $U_{13} = U_0 + 13r = 67$.
2. $U_n = U_0 + nr = 2 + 5n$.
3. (U_n) est croissante car $r > 0$.

Exercice 2

$U_7 = U_4 + 3r = 34$, $U_0 = U_4 - 4r = 13$.

Exercice 3

$U_{11} = U_4 + 7r \Leftrightarrow 19 = 5 + 7r \Leftrightarrow 14 = 7r \Leftrightarrow r = 2$.
$U_0 = U_4 - 4r = -3$.

Exercice 4

$$\begin{cases} U_2 + U_3 + U_4 = 15 \\ U_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 + 2r + U_0 + 3r + U_0 + 4r = 15 \\ U_0 + 6r = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3U_0 + 9r = 15 \\ U_0 + 6r = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 2L_1 - 3L_2 \\ L_1 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3U_0 = -30 \\ -9r = -45 \end{cases}.$$

On en déduit que $U_0 = -10$ et $r = 5$.

Exercice 5

Déterminer si la suite (U_n) est arithmétique ou non dans les cas suivants :

1. Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 2(n+1) - 3 - 2n + 3 = 2 =$ constante. Donc (U_n) est arithmétique de raison $r = 2$.
2. Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ qui n'est pas constant. (U_n) n'est pas arithmétique.
   On peut aussi montrer que $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$.

Exercice 6

On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec **intérêts simples** (autrement dit, chaque année, on reçoit les mêmes intérêts égaux à 3 % du capital **initial**).
On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. $\dfrac{3}{100} \times 8000 = 240$
2. (U_n) est arithmétique de raison $r = 240$.
3. $U_n = U_0 + nr = 8000 + 240n$.
4. $U_{15} = 8000 + 240 \times 15 = 11600$

Exercice 7

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $U_0 = 1$.

$U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{U_0 + U_{10}}{2} = 11 \times \dfrac{1 + 21}{2} = 121$, car $U_{10} = U_0 + 10r = 21$.

$U_{20} + U_{21} + \cdots + U_{43} = 24 \times \dfrac{U_{20} + U_{43}}{2} = 24 \times \dfrac{41 + 87}{2} = 1536$, car $U_{20} = U_0 + 20r = 41$ et $U_{43} = U_0 + 43r = 87$.

Exercice 8

$1+2+3+\cdots+n=276 \Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}=276 \Leftrightarrow n^2+n-552=0.$

$\Delta=2209$, $n_1=\dfrac{-1-47}{2}=-24$, $n_2=\dfrac{-1+47}{2}=23.$

Exercice 9

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0=5$ et de raison $q=3$.

1. $U_2=q^2\times U_0=45$; $U_5=q^5\times U_0=1215$.
2. $U_n=q^n\times U_0=3^n\times 5$.
3. $U_0>0$ et $q>1$ donc (U_n) est croissante.

Exercice 10

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0=32$ et de raison $q=\dfrac{1}{2}$.

1. $U_3=q^2\times U_0=4$; $U_6=q^6\times U_0=\frac{1}{2}$.
2. $U_n=q^n\times U_0=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 32$
3. $U_0>0$ et $0<q<1$ donc (U_n) est décroissante.

Exercice 11

$U_4=q^4\times U_0 \Leftrightarrow 81=3^4\times U_0 \Leftrightarrow U_0=1$
$U_7=q^3\times U_4=2187.$

Exercice 12

$2U_2=3U_1-U_0 \Leftrightarrow 2q^2U_0=3qU_0-U_0 \Leftrightarrow 2q^2U_0-3qU_0+U_0=0$
$\Leftrightarrow U_0\left(2q^2-3q+1\right)=0 \Leftrightarrow 2q^2-3q+1$ car $U_0\neq 0$.
$\Delta=1$, $q_1=\dfrac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$, $q_2=\dfrac{3+1}{4}=1$. Il faut $q=\frac{1}{2}$ ou $q=1$.

Exercice 13

Déterminer si la suite (U_n) est géométrique ou non dans les cas suivants :

1. Pour tout n, $U_n\neq 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=\dfrac{-4\times 5^{n+1}}{-4\times 5^n}=5=$ constante. Donc (U_n) est géométrique de raison 5.
2. Pour tout n, $U_n\neq 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=\dfrac{\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}}=\dfrac{2n+1}{2n+3}$ qui n'est pas constant. (U_n) n'est pas géométrique.

   On peut aussi montrer que $\dfrac{U_2}{U_1}\neq\dfrac{U_1}{U_0}$.

Exercice 14

On place un capital $U_0=8000$ euros à 3 % par an avec **intérêts composés** (autrement dit, chaque année, on reçoit des intérêts égaux à 3 % du capital de **l'année précédente**).
On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. capital d'une année=capital de l'année précédente+intérêts.
   On a donc $U_{n+1}=U_n+\frac{3}{100}\times U_n=\left(1+\frac{3}{100}\right)U_n=1,03U_n$
2. (U_n) est géométrique de raison $q=1,03$.
3. $U_n=q^n\times U_0=1,03^n\times 8000$.
4. $U_8=1,03^8\times 8000=10134,2$.

Exercice 15

La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon est divisée par 2 (cette période est constante).
On note U_0 la masse initiale de l'élément radioactif et U_n sa masse au bout de n périodes de désintégration.

1. On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par $0,5$. (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$.
2. La période de désintégration du radium est de 1500 ans et on considère un échantillon de 5 g de radium. On note $U_0 = 5$ et U_n la masse de l'échantillon au bout de n périodes de désintégration.
   (a) $U_n = q^n \times U_0 = 0,5^n \times 5$.
   (b) 10500 ans correspond à 7 périodes de désintégration et $U_7 = 0,5^7 \times 5 \approx 0,04$.

Exercice 16

Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $U_0 = 1$.

$$U_0 + U_1 + \cdots + U_{12} = U_0 \times \frac{1-2^{13}}{1-2} = 8191$$

$$U_2 + U_3 + \cdots + U_{15} = U_2 \times \frac{1-2^{14}}{1-2} = 4\left(2^{14}-1\right) = 65532.$$