Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{2n}{n+3}$.

1. $u_0 = \dfrac{2\times 0}{0+3} = 0$.
   $u_3 = \dfrac{2\times 3}{3+3} = 1$.
   $u_{n+1} = \dfrac{2\times(n+1)}{n+1+3} = \dfrac{2n+2}{n+4}$.
2. Le script python ci-dessous permet de calculer u_n après avoir saisi la valeur de n.

```
n=int(input("n="))
U=(2*n)/(n+3)
print(U)
```

Exercice 2

Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon explicite.

```
n=int(input("n="))
U=n/(n+1)
print(U)
```

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{n}{n+1}$.
2. $U_9 = \dfrac{9}{9+1} = \dfrac{9}{10} = 0,9$.
   $U_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+1+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = 5-3U_n$ et $U_0 = 1$.

1. $U_1 = 5-3U_0 = 5-3 = 2$ et $U_2 = 5-3U_1 = 5-6 = -1$.
2. Le script python ci-dessous permet de calculer U_n après avoir entré n.

```
U=1
n=int(input("n="))
for i in range(n):
    U=5-3*U
print(U)
```

Exercice 4

Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon récurrente.

```
U=2
n=int(input("n=?"))
for i in range(n):
    U=4*U-3
print(U)
```

1. $U_{n+1} = 4U_n - 3$.
2. $U_1 = 4U_0 - 3 = 4\times 2 - 3 = 5$ et $U_2 = 4U_1 - 3 = 4\times 5 - 3 = 17$.

Exercice 5

Une plaque de verre teintée est telle qu'un rayon lumineux qui la traverse perd 20 % de son intensité lumineuse et on fait traverser à un rayon lumineux d'intensité 50 cd une série de ces plaques de verre teintée.
On note $I_0 = 50$ et I_n l'intensité du rayon lumineux après le passage de n plaques.

1. $I_{n+1} = 0,8 I_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 0,8$. Donc, la suite (I_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme 50.
3. La suite (I_n) est géométrique,Exprimer I_n en fonction de n, donc : $I_n = I_0 \times 0,8^n = 50 \times 0,8^n$.
4. $I_4 = 50 \times 0,8^4 = 20,48$.
   Ainsi, l'intensité du rayon lumineux après le passage de 4 plaques est de 20,48 cd.
5. Ce script détermine le plus petit nombre de plaques que le rayon lumineux doit franchir pour que son intensité devienne inférieure à 1 cd.

```
n=0
I=50
while I>1 :
      I=0.8*I
      n=n+1
print(n)
```

Exercice 6

Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon récurrente.

```
U=25
n=int(input("n "))
for i in range(n):
    U=0.9*U+2
print(U)
```

1. $U_{n+1} = 0,9U_n + 2$ et $U_0 = 25$.
2. $U_1 = 0,9U_0 + 2 = 0,9 \times 25 + 2 = 24,5$ et $U_2 = 0,9U_1 + 2 = 0,9 \times 24,5 + 2 = 24,05$.
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 20$.
   (a) $V_0 = U_0 - 20 = 25 - 20 = 5$, $V_1 = U_1 - 20 = 4,5$ et $V_2 = U_2 - 20 = 4,05$.
   (b) $V_{n+1}, = U_{n+1} - 20 = 0,9U_n + 2 - 20 = 0,9U_n - 18 = 0,9(U_n - 20) = 0,9V_n$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 0,9$. Donc, la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme 25.
   (d) (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme 25, Ainsi :
   $V_n = V_0 \times 0,9^n = 5 \times 0,9^n$ et $U_n = V_n + 20 = 20 + 5 \times 0,9^n$.
   (e) $U_{10} = 20 + 5 \times 0,9^{10} = 21,7433922$.
   (f) (V_n) est une suite géométrique, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} V_0 + V_1 + \cdots + V_9 &= V_0\left(1 + 0,9 + \cdots + 0,9^9\right) \\ &= V_0 \times \frac{0,9^{10} - 1}{0,9 - 1} \\ &= 50 \times \left(0,9^{10} - 1\right) \\ &= 32,566078. \end{aligned}$$

   On déduit alors que :

$$\begin{aligned} U_0 + U_1 + \cdots + U_9 &= V_0 + V_1 + \cdots + V_9 + 10 \times 20 \\ &= 32,566078 + 200 \\ &= 232,566078. \end{aligned}$$

Exercice 7

Au 1er janvier 2024, la même entreprise comptait 1500 employés. Il est prévu que, pour toutes les années à venir, 20% de l'effectif au premier janvier partira à la retraite durant l'année et que pour ajuster ses effectifs, l'entreprise embauchera 200 jeunes dans l'année.
On note U_n, le nombre d'employés au premier janvier de l'année 2024 + n. On a ainsi $U_0 = 1500$.

1. Pour tout entier positif n, $U_{n+1} = (1-20\%)U_n + 200 = 0,8 \times U_n + 200$.
2. $V_{n+1} = U_{n+1} - 1000 = 0,8 \times U_n + 200 - 1000 = 0,8 \times U_n - 800 = 0,8\,(U_n - 1000) = 0,8V_n$.
   Ainsi, (U_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $V_0 = 500$.
3. (U_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $V_0 = 500$, donc :
   $V_n = 500 \times 0,8^n$ et $U_n = 500 \times 0,8^n + 1000$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} U_{n+1} - U_n & = & 500 \times 0,8^{n+1} + 1000 - \left(500 \times 0,8^n + 1000\right) \\ & = & 500 \times 0,8^{n+1} + 1000 - 500 \times 0,8^n 1000 \\ & = & 500 \times 0,8^{n+1} - 500 \times 0,8^n \\ & = & 500 \times 0,8^n \times (0,8-1) \\ & = & -100 \times 0,8^n. \end{array}$$

   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-100 \times 0,8^n < 0$. Donc, $U_{n+1} - U_n < 0$. Autrement dit, (U_n) est décroissante.
5. Le script python ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle l'entreprise comptera moins de 1150 employés au premier janvier.

```python
annee=2024
U=1500
while U>1150:
      U=0.8*U+200
      annee=annee+1
print(annee)
```