Lycée Évariste Galois	**AP**	1re Spé
2024/2025	**Corrigés : Suites & Monotonie**	maths-mde.fr

Exercice 1

Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 4-2n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}-u_n & = & 4-2(n+1)-(4-2n) \\ & = & 4-\cancel{2n}-2-4+\cancel{2n} \\ & = & -2. \end{array}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n < 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 2

Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}-u_n & = & 3(n+1)-3n \\ & = & \cancel{3n}+3-\cancel{3n} \\ & = & 3. \end{array}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n > 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 3

Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = (0,2)^n$.
On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n > 0$. De plus,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} & = & \dfrac{0,2^{n+1}}{0,2^n} \\ & = & 0,2. \end{array}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Autrement dit, $u_{n+1} < u_n$.
Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 4

Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{1}{n+3}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}-u_n & = & \dfrac{1}{n+4}-\dfrac{1}{n+3} \\ & = & \dfrac{n+3}{(n+4)(n+3)}-\dfrac{n+4}{(n+3)(n+4)} \\ & = & \dfrac{-1}{(n+4)(n+3)}. \end{array}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+4>0$ et $n+3>0$. Donc, $u_{n+1}-u_n < 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 5

Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = (-2)^n$.
Voici les premiers termes de la suite (u_n) :
$u_0 = (-2)^0 = 1$.
$u_1 = (-2)^1 = -2$.
$u_2 = (-2)^2 = 4$.
$u_3 = (-2)^3 = -8$.
On constate que les termes consécutifs, pour tout entier naturel n, u_n et u_{n+1} sont de signes opposés. Ainsi, cette suite n'est pas monotone.

Exercice 6

Étudier la monotonie de la suite u, pour tout entier naturel n, en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1. $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n - 3. \end{cases}$
   Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2}. \end{cases}$
   Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n^2}$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} > 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n < 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 7

Étudier la monotonie de la suite u, pour tout entier naturel n, en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 2(n+1) - (n^2 + 2n) \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n \\ &= 2n + 3. \end{aligned}$$
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 3 > 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n > 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2. \end{cases}$
   Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n + \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = {u_n}^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${u_n}^2 + \dfrac{1}{4} > 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n > 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.
3. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3n + u_n. \end{cases}$
   Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = 3n \geqslant 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 8

Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\,;\,+\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1. $u_n = 4n-7$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $f(x) = 4x-7$.
f est une fonction affine. 4 est son coefficient directeur. 4 étant positif, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Or, $u_n = f(n)$. Donc, la suite (u_n) est croissante.

2. $u_n = \sqrt{n}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $f(x) = \sqrt{x}$.
f est la fonction racine carrée, elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Or, $u_n = f(n)$. Donc, la suite (u_n) est croissante.

3. $u_n = n^2-4n+5$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $f(x) = x^2-4x+5$.
Le discriminant, de la fonction polynôme f de degré 2, est égal à : $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times1\times5 = -4$.
Δ étant négatif, ce polynôme n'admet pas de racine et il est du signe de son coefficient principal, autrement positif.
La parabole représentant f est ainsi orientée vers le haut et admet un minimum au point d'abscisse $\dfrac{-b}{2a} = 2$.
On déduit alors que la fonction f est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.
Par ailleurs, $u_n = f(n)$. Donc, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

4. $u_n = \dfrac{1}{4n}$.
On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{1}{4x}$.
On sait que la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, donc f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
Or, $u_n = f(n)$. Donc, la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 9

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1. $u_n = 3n^2$.
On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, par : $f(x) = 2x^2$.
On sait que la fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, donc f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
Or, $u_n = f(n)$. Donc, la suite (u_n) est croissante.

2. $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{2(n+1)+5}{n+1+1} - \frac{2n+5}{n+1}\\
&= \frac{2n+7}{n+2} - \frac{2n+5}{n+1}\\
&= \frac{(2n+7)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(2n+5)(n+2)}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{2n^2+7n+2n+7}{(n+2)(n+1)} - \frac{2n^2+4n+5n+10}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{2n^2+9n+7}{(n+2)(n+1)} - \frac{2n^2+9n+10}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{-3}{(n+2)(n+1)}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1) > 0$. Donc, $u_{n+1}-u_n < 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. $u_n = \sqrt{n+1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n+2 > n+1$. De plus, la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc, $\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

4. $u_n = \dfrac{0,5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{0,5^{n+1}}{n+1}}{\frac{0,5^n}{n}} \\ &= \frac{0,5^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{0,5^n} \\ &= \frac{0,5n}{n+1}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0,5n+1>0 \Leftrightarrow n+1>0,5n \Leftrightarrow \frac{0,5n}{n+1}<1$ et $u_n>0$. Donc $u_{n+1}<u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 10

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 \times 2 \times \ldots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times \ldots \times n} \\ &= n+1. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1>1$ et $u_n>0$. Donc, $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$. Autrement dit, $u_{n+1}>u_n$. Il s'agit ainsi d'une suite strictement croissante.
Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 11

Le plutonium 239 est un élément radioactif.
On sait que la quantité de plutonium 239 diminue de 0,003 % tous les ans.
On s'intéresse à un déchet radioactif contenant 1 g de plutonium 239 l'année $t=0$ et on note t le nombre d'années écoulées à partir de ce moment.
On note m_t la masse de plutonium 239, exprimée en gramme, présente dans le déchet à l'instant t.

1. $m_{t+1} = (1-0,00003)m_t = 0,99997$ en fonction de m_t.
2. (m_t) est une suite géométrique de raison 0.99997 et de premier terme 1. Ainsi, $m_t = (0,99997)^t$.
3. Pour tout $t \geqslant 0$, on a : $m_t>0$ et $\frac{m_{t+1}}{m_t} = 0,99997<1$. Ainsi, la suite (m_t) est strictement croissante.
4. En utilisant un tableur, on constate qu'il faudra environ 23200 d'années pour diminuer de moitié la masse de plutonium 239 dans ce déchet.

Cette durée s'appelle demi-vie radioactive du plutonium 239.

Exercice 12

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 2n^2-5n-2$.
   Selon la calculatrice, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = -3n^3+4n^2-1$.
   Selon la calculatrice, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 13

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u :

1. définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$; Selon la calculatrice, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+4}$; Selon la calculatrice, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n+1}$; Selon la calculatrice, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
4. définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5n+1}{3n-2}$, Selon la calculatrice, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{5}{3}$.

Exercice 14

Une balle rebondissante est telle que chaque rebond a une hauteur égale à 80 % du rebond précédent.

1. $h_{n+1} = 0,8h_n$. Le quotient de deux termes consécutifs étant constant, la suite (h_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme h_0. Ainsi, $h_n = h_0 \times 0,8^n$.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, $h_n > 0$ et $\dfrac{h_{n+1}}{h_n} < 1$. Donc, la suite (h_n) est strictement décroissante.
3. La hauteur sera inférieure au cinquième de sa hauteur initiale lorsque : $h_0 \times 0,8^n \leqslant \dfrac{h_0}{5} \Leftrightarrow 0,8^n < \dfrac{1}{5}$.

   En utilisant la calculatrice, on obtient $n = 9$.

Exercice 15

On jette chaque année 160 kg de déchets dans un bois. On estime que 20 % de la totalité des déchets présents se dégradent.

On note u_n la quantité de déchets présents l'année 2014+n, sachant qu'en 2014 un grand nettoyage du bois a été effectué et que l'on suppose donc que $u_0 = 0$.

1. Montrer que $u_{n+1} = 0,8u_n + 160$ pour tout entier naturel n.
2. Construire les six premiers termes de la suite (u_n) (échelle : 1 cm pour 50 kg sur les deux axes).
3. Conjecturer le sens de variations ainsi que la convergence de la suite.
4. Que peut-on en déduire quant à l'évolution de la quantité de déchets dans ce bois ?