## Exercice 1

Notons $(x_A\ ;\ y_A)$ les coordonnées du point $A$. On a, par définition :
$x_A = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_A = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Notons $(x_B\ ;\ y_B)$ les coordonnées du point $B$. On a, par définition :
$x_B = \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{1\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_B = \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Notons $(x_C\ ;\ y_C)$ les coordonnées du point $B$. On a, par définition :
$x_C = \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
et $y_C = \sin\left(\frac{-5\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

## Exercice 2

Notons $(x_A\ ;\ y_A)$ les coordonnées du point $A$. On a, par définition :
$x_A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $y_A = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Notons $(x_B\ ;\ y_B)$ les coordonnées du point $B$. On a, par définition :
$x_B = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{1\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
et $y_B = \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Notons $(x_C\ ;\ y_C)$ les coordonnées du point $B$. On a, par définition :
$x_C = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
et $y_C = \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

## Exercice 3

Soit $x$ un nombre réel tel que $\cos(x) = \frac{1}{4}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \sin^2(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{16} + \sin^2(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin^2(x) = 1 - \frac{1}{16} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin^2(x) = \frac{15}{16}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$, donc $\sin(x) < 0$. On déduit alors que : $\sin(x) = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

## Exercice 4

Notons $(x_M\ ;\ y_M)$ les coordonnées du point $M$.

1. On a, par définition :

$$x_M=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right))=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } y_M=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. On a, par définition :

   $$x_M=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } y_M=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}.$$

3. On a, par définition :

   $$x_M=\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } y_M=\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. On a, par définition :

   $$x_M=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \text{ et } y_M=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

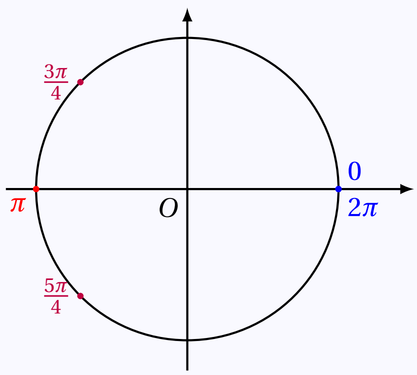
## Exercice 5

On considère l'équation

$$\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

1. Sur $]-\pi\,;\,\pi]$, l'équation (1) admet deux solutions : $x_1=\frac{3\pi}{4}$ et $x_2=\frac{5\pi}{4}$.

   Voici les deux points correspondants sur le cercle trigonométrique :



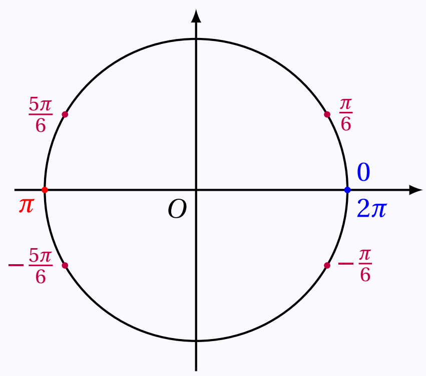

2. $S=\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ ,\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi \ \text{ où } \ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

## Exercice 6

1. $\sin(x)=\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow x=\frac{9\pi}{8}+2k\pi \ \text{ ou } \ x=\frac{15\pi}{8}+2k\pi \ \text{ avec } \ k\in\mathbb{Z}.$
2. $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8}$, $\frac{25\pi}{8}$ et $\frac{31\pi}{8}$ sont les solutions appartenant à l'intervalle $]0\,;\,4\pi]$.

## Exercice 7

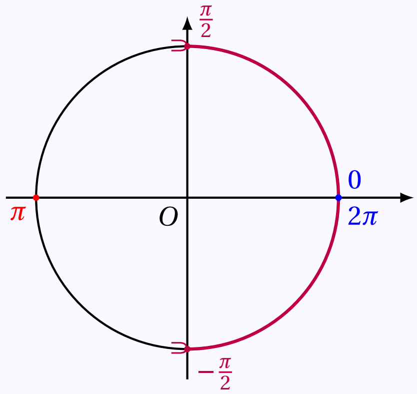
Si $x\in\,]-\pi\,;\,\pi]$, alors $2x\in\,]-2\pi\,;\,2\pi]$. Ainsi, l'équation $\cos(2x)=\frac{1}{2}$ quatre solutions appartenant $]-\pi\,;\,\pi]$.
En effet, $2x=\frac{\pi}{3}$ ou $2x=-\frac{\pi}{3}$ ou $2x=\frac{5\pi}{3}$ ou $x=-\frac{5\pi}{3}$.
Autrement dit, $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=-\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}$.
Ci-contre les deux points placés sur le cercle trigonométrique :



## Exercice 8

On considère l'inéquation $\cos(x) > 0$.

1. L'ensemble de solutions sur le cercle trigonométrique, de cette inéquation, est représenté en rouge :

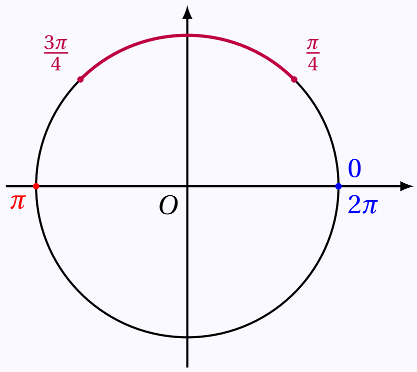



2. $S = \left]-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$.

## Exercice 9

On considère l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. L'ensemble de solutions sur le cercle trigonométrique, de cette inéquation, est représenté en rouge :

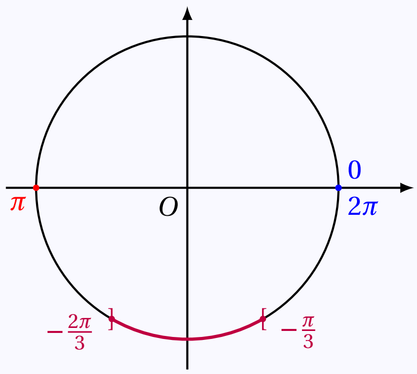



2. $S = \left[\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{3\pi}{4}\right]$.

## Exercice 10

On considère l'inéquation $\sin(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. L'ensemble de solutions sur le cercle trigonométrique, de cette inéquation, est représenté en rouge :




2. $S = \left]-\frac{2\pi}{3} \,;\, \frac{-\pi}{3}\right[$

## Exercice 11

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{1}{2} \\ \sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} .$$

## Exercice 12

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} .$$

## Exercice 13

On souhaite résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$ :

$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

1. On effectue un changement de variable.
   On pose $X = \cos x$ avec $x \in [-1\ ;\ 1]$.
   (a) Quelle équation du second degré est équivalente à $(\mathbf{1})$ ?
   (b) Montrer que son discriminant peut s'écrire : $4(1-\sqrt{3})^2$.
   (c) Déterminer les solutions de cette équation du second degré.
2. En déduire les solutions de l'équation $(\mathbf{1})$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

## Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(\sin(2x)+1)\left(2\cos(x)+\sqrt{2}\right) = 0.$$