7

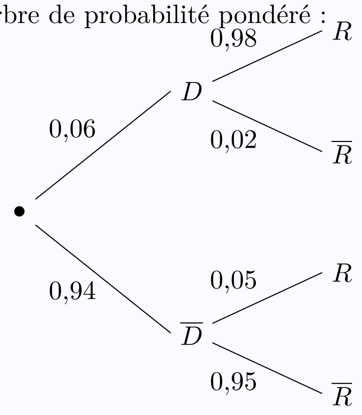
Corrigés

Probabilités conditionnelles

Série d'exercices — **Classe : 1re Spé** — **Lycée : Evariste Galois**

Exercice n°1

1. Voici l'arbre de probabilité pondéré :



2. (a) En suivant la deuxième branche :
$p(\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{R}}) = 0{,}06\times 0{,}02 = \underline{0{,}001\,2}$.

   (b) Il y a erreur de contrôle pour les événements disjoints $\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{R}}$ et $\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{R}$.
Sa probabilité est donc :

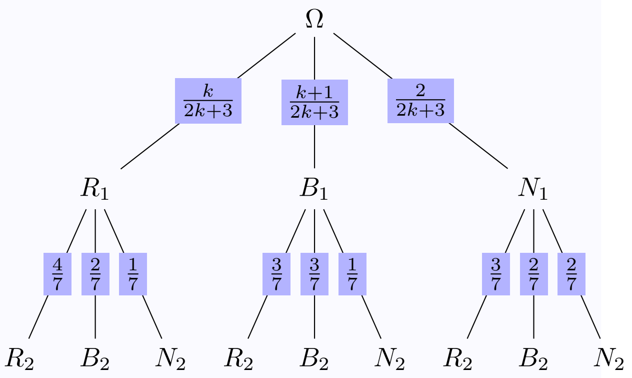
$$\begin{aligned}p(\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{R}})+p(\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{R}) &= 0{,}06\times 0{,}02+0{,}94\times 0{,}05\\ &= 0{,}001\,2+0{,}047\,0\\ &= \underline{0{,}048\,2}.\end{aligned}$$

3. La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à :

$$\begin{aligned}p\left(\mathrm{D}\cap\overline{\mathrm{R}}\right)+p\left(\overline{\mathrm{D}}\cap\overline{\mathrm{R}}\right) &= 0{,}06\times 0{,}02+0{,}94\times 0{,}95\\ &= 0{,}001\,2+0{,}893\,0\\ &= \underline{0{,}894\,2}.\end{aligned}$$

Exercice n°2

1. Voici l'arbre de probabilité complété :

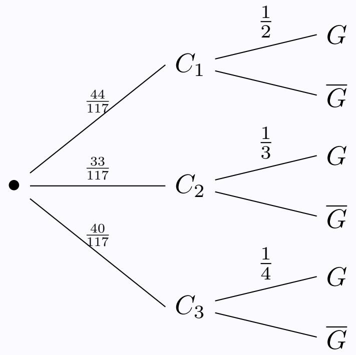


2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p(D) &= p_{R_1}(B_2)+p_{R_1}(N_2)+p_{B_1}(R_2)+p_{B_1}(N_2)+p_{N_1}(R_2)+p_{N_1}\\ &= 1-\left(p_{R_1}(R_2)+p_{B_1}(B_2)+p_{N_1}(N_2)\right)\\ &= 1-\left(\frac{k}{2k+3}\times\frac{4}{7}+\frac{k+1}{2k+3}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{2k+3}\times\frac{2}{7}\right)\\ &= 1-\frac{4k+3k+3+4}{14k+21}\\ p(D) &= \frac{k+2}{2k+3}.\end{aligned}$$

Exercice n°3

Dans une école, il y a 3 classes C_1, C_2, C_3 dont le nombre d'élèves est respectivement 44, 33, 40. Chaque classe a une probabilité de gagner à un jeu respectivement de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.
Notons G l'événement : « L'élève gagne ».
Il y a en tout $44+33+40=117$ élèves sur l'ensemble des trois classes. On a alors l'arbre de la page suivante.



On en déduit :

$$p(G)=\frac{44}{117}\times\frac{1}{2}+\frac{33}{117}\times\frac{1}{3}+\frac{40}{117}\times\frac{1}{4}=\frac{43}{117}.$$

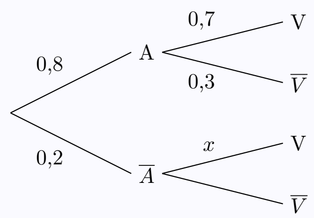
On sait de plus que :

$$p_G\left(C_2\right)=\frac{p(C_2\cap G)}{p(G)}=\frac{\frac{33}{117}\times\frac{1}{3}}{\frac{43}{117}}=\frac{11}{43}.$$

Ainsi, si un élève gagne, la probabilité qu'il vienne de la classe C_2 est $\dfrac{11}{43}$.

Exercice n°4

1. L'arbre de probabilité est le suivant :



2. On cherche $x=p_{\overline{A}}(V)$. Pour cela, on a :

$$\begin{aligned}0{,}8 &= 0{,}8\times 0{,}7+0{,}2x\\ x &= \frac{0{,}8-0{,}8\times 0{,}7}{0{,}2}\\ x &= \frac{0{,}24}{0{,}2}\\ x &= 1{,}2>1.\end{aligned}$$

Impossible car une probabilité est comprise entre 0 et 1.

3. D'après la question précédente, $p(V)=0{,}56+0{,}2x$. De

plus, $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant 0{,}2x \leqslant 0{,}2 \\ \iff & 0{,}56 \leqslant 0{,}56 + 0{,}2x \leqslant 0{,}76 \\ \iff & 0{,}56 \leqslant p(V) \leqslant 0{,}76. \end{aligned}$$

Ainsi, Mimolette pourra espérer avoir entre 56% et 76% de ses vidéos, vues plus de 200 000 fois.

Exercice n°5

Dans un lycée de 2000 élèves, 55% sont des garçons.
Parmi les garçons, 70% font « Anglais L.V.1 » , le reste faisant « Espagnol L.V.1 ».
On sait de plus que 65% des élèves de ce lycée font « Anglais L.V.1 ».

1. On a le tableau complété suivant :

1 100 − 770

70% des garçons

65% élèves

2 000 − 1 30

	Filles	Garçons	Total
Ang L.V.1	530	770	1 300
Esp L.V.1	370	330	700
Total	900	1 100	2 000

700 − 330

Total élèves

55% des élèves du lycée

2 000 − 1 100

2. On choisit au hasard un élève parmi les 2 000.
Il y a 770 garçons qui font Anglais L.V.1 donc la probabilité que l'élève pris au hasard soit un garçon faisant Anglais L.V.1 est :
$$\frac{770}{2\,000} = \frac{77}{200}.$$
3. On choisit au hasard un élève parmi les 2 000.
Il y a 900 filles dont 370 filles qui font Espagnol L.V.1. Donc la probabilité que l'élève choisi(e) soit une fille ou fasse Espagnol L.V.1 est :
$$\frac{900 + 700 - 370}{2\,000} = \frac{1\,230}{2000} = \frac{123}{200}.$$
4. On choisit parmi les 1 100 garçons. Il y en a 330 qui font Espagnol L.V.1 donc la probabilité que l'on choisisse un élève qui fait Espagnol L.V.1 parmi les garçons est :
$$\frac{330}{1\,100} = \frac{33}{110}.$$
5. On sait qu'il y a 530 filles qui font Anglais L.V.1 donc sachant que l'élève choisie est une fille, la probabilité qu'elle fasse Anglais L.V.1 est :
$$\frac{530}{900} = \frac{53}{90}.$$

Exercice n°6

Ceci est un Q.C.M. Une seule réponse est exacte pour chaque question.

Les élèves de deux classes de terminale ES (désignées par TE 1 et TE 2) sont répartis selon leur spécialité (qui sont abrégées par SES, LV, Math) de façon suivante.

Spécialité \ Classe	TE 1	TE 2	Total
SES	16	8	24
LV	12	14	26
Math	6	10	16
Total	34	32	66

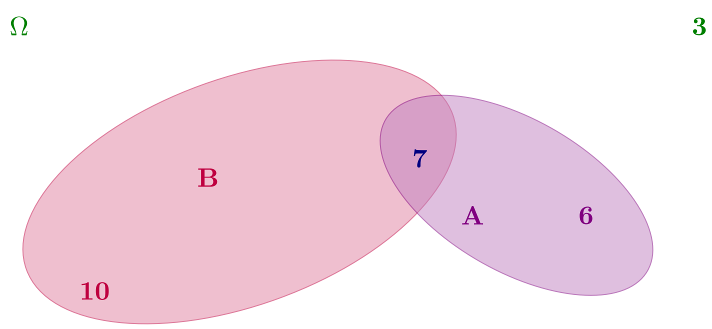
1. Réponse (c).
En effet, il y a 34 élèves en TE 1 sur les 66 au total. La probabilité est donc égale à $\dfrac{34}{66} = \dfrac{17}{33}$.
2. Réponse (a).
En effet, il y a 16 élèves qui suivent l'enseignement de spécialité Math et 34 qui sont en TE 1, auxquels il faut enlever les 6 qui font aussi spécialité Math.
La probabilité est donc égale à : $\dfrac{16 + 34 - 6}{66} = \dfrac{44}{66} = \dfrac{2}{3}$.
3. Réponse (c).
Il y a 6 élèves de TE 1 qui suivent l'enseignement de spécialité Math, donc 6 sur 34. La probabilité est donc égale à $\dfrac{6}{34} = \dfrac{3}{17}$.
4. Réponse (c).
Il y a 16 élèves qui suivent l'enseignement de spécialité Math, dont 6 sont en TE 1. La probabilité est donc égale à $\dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.

Exercice n°7

On considère deux événements A et B de l'univers Ω. Nous avons réunis dans le tableau suivant le nombre d'éléments de A et B.

	A	$\overline{A}$
B	7	10
$\overline{B}$	6	3

Avant tout, faisant un diagramme de Venn du tableau :



On voit alors qu'il y a en tout $10+7+6+3=26$ éléments dans l'univers.

1. $p(A\cap B)=\dfrac{7}{26}$.
2. $p(A\cup B)=\dfrac{10+7+6}{26}=\dfrac{23}{26}$.
3. $p(\overline{A}\cup B)=p(\overline{A})+p(B)-p(\overline{A}\cap B)=\dfrac{13}{26}+\dfrac{17}{26}-\dfrac{10}{26}=\dfrac{10}{13}$.
4. $p(\overline{A\cap B})=1-p(A\cap B)=1-\dfrac{7}{26}=\dfrac{19}{26}$.

Exercice n°8

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

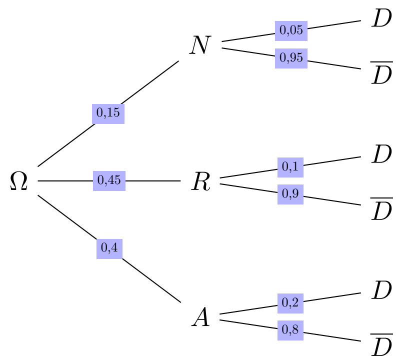
Une étude statistique indique que :

- 5% des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10% des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20% des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc. On note les événements suivants :

- N : « L'ordinateur est neuf »
- R : « L'ordinateur est récent »
- A : « L'ordinateur est ancien »
- D : « L'ordinateur est défaillant »
- $\overline{D}$ l'événement contraire de D.

1. Voici l'arbre pondéré :



2. La probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant est donnée par :
$$P(N\cap D)=P(N)\times P_N(D)=0{,}15\times 0{,}05=0{,}007\,5.$$
3. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap R)+P(D\cap N).$$
Ainsi, d'après l'arbre, on a :
$$P(D)=0{,}4\times 0{,}2+0{,}45\times 0{,}1+0{,}007\,5=0{,}132\,5.$$
4. La probabilité que l'ordinateur choisi soit ancien sachant qu'il est défaillant est donnée par :
$$P_D(A)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}08}{0{,}132\,5}=\frac{32}{53}\approx 0{,}60.$$

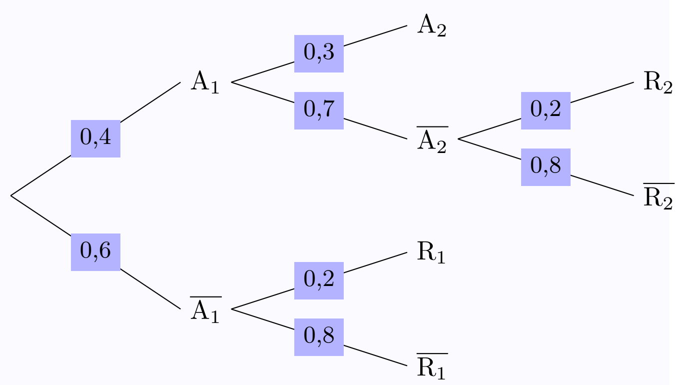
Exercice n°9

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
Les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
On note A l' événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $P(A)=0{,}02$ et $P(B)=0{,}01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Comme A et B sont indépendants,
$$\begin{aligned}P(C)&=p(A\cap B)\\&=p(A)\times p(B)\\&=0{,}02\times 0{,}01\\P(C)&=0{,}000\,2.\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}P(D)&=p(A\cup B)\\&=p(A)+p(B)-p(A\cap B)\\&=0{,}02+0{,}01-0{,}000\,2\\P(D)&=0{,}029\,8.\end{aligned}$$
3. On a $E=\overline{D}$ d'où :
$$\begin{aligned}P(E)&=1-p(D)\\&=1-0{,}029\,8\\P(E)&=0{,}970\,2.\end{aligned}$$
4. A et B étant indépendants, par propriété :
$$\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=p(B)=0{,}01.$$

Exercice n°10

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.
Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.
Avant tout, construisons un arbre de probabilités schématisant notre problème :



1. $P(R_1) = P_{\overline{A_1}}(R_1) \times P(\overline{A_1})$
$= 0{,}2 \times 0{,}6$
$P(R_1) = 0{,}12.$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R_1) + P(R_2) \\ &= 0{,}12 + 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}12 + 0{,}056 \\ P(R) &= 0{,}176. \end{aligned}$$

3. Nous cherchons $P_R(R_1)$.

$$\begin{aligned} P_R(R_1) &= \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)} \text{Or, } P(R_1 \cap R) = P(R_1). \\ &= \frac{0{,}12}{0{,}176} \\ P_R(R_1) &= \frac{15}{22} \approx 0{,}682. \end{aligned}$$

Exercice n°11

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population.
On pose :
— M : « l'individu est malade »
— T : « le test est positif ».
Alors, l'énoncé nous dit que :
— $P(M) = \frac{1}{1\,000}$, d'où $P(\overline{M}) = \frac{999}{1\,000}$;
— $P_T(M) = \frac{99}{100}$;
— $P_{\overline{M}}(T) = \frac{1}{1\,000}$.
On cherche alors à déterminer $P_T(M)$.

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{P_T(M) \times P(M)}{P_T(M) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})} \\ &= \frac{0{,}990}{0{,}999 + 0{,}990} \\ &\approx 0{,}498. \end{aligned}$$

Ainsi, si le test est positif, la probabilité que l'individu soit réellement malade est d'environ 0,5.

Exercice n°12

On pose :

— M : « l'individu est malade »
— T : « le test est positif ».

Alors, l'énoncé nous dit que :

— $P(M) = 0{,}5\% = \frac{5}{1\,000} = \frac{1}{200}$, d'où $P(\overline{M}) = \frac{199}{200}$;
— $P_M(T) = \frac{99}{100}$;
— $P_{\overline{M}}(T) = 2\% = \frac{1}{50}$.

On cherche à déterminer $P_T(M)$.

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap P)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}99 \times 0{,}005}{0{,}99 \times 0{,}005 + 0{,}02 \times 0{,}995} \\ &\approx 0{,}2. \end{aligned}$$

Il y a donc environ 20% des individus malades sachant que le test est positif.

Exercice n°13

On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population. On pose :
— M : « l'individu est malade »
— T : « le test est positif ».
D'après énoncé, on sait que :
— $P(M) = 1\% = 0{,}01$, d'où $P(\overline{M}) = 0{,}99$;
— $P_M(T) = 0{,}9$;
— $P_{\overline{M}}(T) = 9\% = 0{,}09$.
On cherche à déterminer $P_T(M)$.

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{P_M(T) \times P(T)}{P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})} \\ &= \frac{0{,}9 \times 0{,}01}{0{,}9 \times 0{,}01 + 0{,}09 \times 0{,}99} \approx 0{,}09. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que cette femme soit malade sachant que le test est positif est donc égale à 0,09.

Exercice n°14

La probabilité d'avoir le cancer du colon à l'âge de 50 ans est de 0,3%.
Le médecin offre un test de détection de sang dans les selles.
Pour 50% des personnes qui souffrent d'un cancer d'intestin, ce test est positif. Les détections faux-positives sont de 3%. On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population. On pose :
— M : « l'individu est malade »
— T : « le test est positif ».
D'après l'énoncé, on sait que :
— $P(M) = 0{,}3\% = 0{,}003$, d'où $P(\overline{M}) = 0{,}997$;
— $P_M(T) = 0{,}5$;
— $P_{overlineM}(T) = 3\% = 0{,}03$.
On cherche à déterminer $P_T(M)$.

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{P_M(T) \times P(M)}{P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})} \\ &= \frac{0{,}5 \times 0{,}003}{0{,}5 \times 0{,}003 + 0{,}03 \times 0{,}997} \\ &\approx 0{,}05. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité d'avoir un cancer du colon sachant que le test est positif est égale à 4%.

Exercice n°15

SIDA : Le test double standard (ELIZA et Western-Blot) détectent dans 99,9% des cas le virus IH et la probabilité d'être un faux-positif est de 0,01%.
Une personne sans facteurs de risque particuliers appartient à un groupe dans lequel seulement 0,01% portent le VIH. Son test est positif.
On choisit Ω comme l'ensemble des individus de la population. On pose :
- M : « l'individu est malade »
- T : « le test est positif ».

D'après l'énonce on sait que :
- $P(M) = 0{,}01\% = 0{,}0001$, d'où $P(\overline{M}) = 0{,}9999$;
- $P_M(T) = 99{,}9\% = 0{,}999$;
- $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}01\% = 0{,}0001$.

On cherche à déterminer $P_T(M)$.

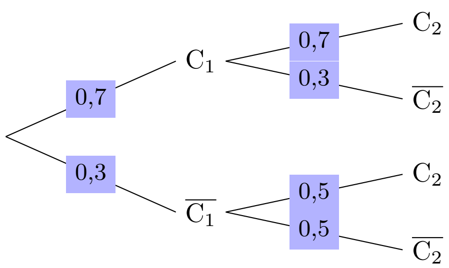
$$\begin{aligned}P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{P_T(M) \times P(M)}{P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})} \\ &= \frac{0{,}999 \times 0{,}0001}{0{,}999 \times 0{,}0001 + 0{,}0001 \times 0{,}9999} \\ &\approx 0{,}5.\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que la personne soit atteinte du VIH sachant que le test est positif est égale à 0,5.

Exercice n°16

Madame Laguigne est très malchanceuse. Elle a constaté que la probabilité pour qu'une montre qu'elle vient d'acheter fonctionne correctement est égale à 0,7. De plus, si la montre qu'elle vient d'acheter ne fonctionne pas, la probabilité pour que la montre qu'elle achètera après fonctionne correctement est égale à 0,5 alors que si la montre fonctionne bien cette probabilité est égale à 0,7.

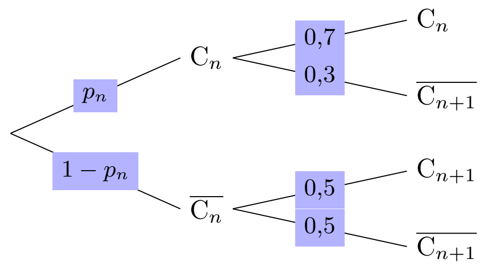
1. L'arbre de probabilités est le suivant :



2. La probabilité que la deuxième montre fonctionne correctement est :

$$\begin{aligned}P(C_2) &= P(C_1 \cap C_2) + P(\overline{C_1} \cap C_2) \\ &= P(C_1) \times P_{C_1}(C_2) + P(\overline{C_1}) \times P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}64.\end{aligned}$$

3. À l'étape n, nous avons l'arbre suivant :



Ainsi,

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= p_n \times 0{,}7 + (1 - p_n) \times 0{,}5 \\ &= 0{,}7p_n + 0{,}5 - 0{,}5p_n \\ p_{n+1} &= 0{,}2p_n + 0{,}5.\end{aligned}$$

4. (a) $$\begin{aligned}u_{n+1} &= p_{n+1} - 0{,}625 \\ &= 0{,}2p_n + 0{,}5 - 0{,}625 \\ &= 0{,}2p_n - 0{,}125 \\ &= 0{,}2\left(p_n - \frac{0{,}125}{0{,}2}\right) \\ &= 0{,}2(p_n - 0{,}625) \\ &= 0{,}2u_n\end{aligned}$$

   Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier terme :

   $$u_1 = p_1 - 0{,}625 = 0{,}7 - 0{,}625 = 0{,}075.$$

   (b) On déduit de la question précédente que :

   $$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0{,}075 \times 0{,}2^{n-1}$$

   et, comme $u_n = p_n - 0{,}625$:

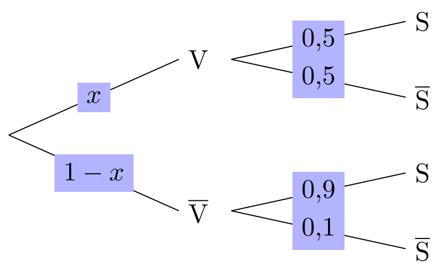
   $$p_n = u_n + 0{,}625, \text{soit} p_n = 0{,}075 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}625.$$

   (c) En utilisant la calculatrice, on constate plus n grandit, plus $0{,}2^n$ se rapproche de 0, donc p_n se rapproche de 0,625.
   Cela signifie qu'à longs termes, la probabilité que madame Laguigne achète une montre qui fonctionne correctement se rapprochera de 0,625.

Exercice n°17

Quand Pierre est en vacances, il pense à sortir les poubelles dans 90% des cas où il le faut, c'est-à-dire la veille du ramassage des ordures. Quand il n'est pas en vacances, il pense à les sortir une fois sur deux.
Son voisin, prof de math de métier, a remarqué que globalement, Pierre pensait à sortir ses poubelles 548 fois sur 1 000.
On note :
- V l'événement « Pierre est en vacances »
- S l'événement : « Pierre pense à sortir les poubelles la veille du ramassage »

Posons $x = P(V)$ et construisons un arbre de probabilités représentant la situation :



On sait que $P(S) = \dfrac{548}{1\,000} = 0{,}548$ d'après le voisin de Pierre.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& P(S) = P(V \cap S) + P(\overline{V} \cap S) \\
\iff & 0{,}548 = P(V) \times P_V(S) + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(S) \\
\iff & 0{,}548 = x \times 0{,}9 + (1-x) \times 0{,}5 \\
\iff & 0{,}548 = 0{,}9x + 0{,}5 - 0{,}5x \\
\iff & 0{,}548 = 0{,}4x + 0{,}5 \\
\iff & 0{,}0{,}4x = 0{,}048 \\
\iff & x = \frac{0{,}048}{0{,}4} \\
\iff & x = 0{,}12.
\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que Pierre soit en vacances est égale à 0,12.

Exercice n°18

Une étude réalisée sur les étudiants d'une université a permis d'établir que 70% des étudiants possèdent un ordinateur et que, parmi ceux-ci, 40% possèdent une automobile.
On sait aussi que 55% des étudiants de l'université ne possèdent pas d'automobile.
On choisit au hasard un étudiant de cette université et on note :

- O l'événement « l'étudiant possède un ordinateur »
- A l'événement « l'étudiant possède une automobile ».
- $P(O) = 0{,}7$;
- $P(\overline{A}) = 0{,}55$ donc $P(A) = 0{,}45$;
- $P_O(A) = 0{,}4$.

Ainsi, $P_O(A) \neq P(A)$ donc A et O ne sont pas indépendants.

Exercice n°19

Chaque jour, Jeanne ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :

- D : « Son portable est déchargé »
- O : « Elle a oublié son portable chez elle »

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

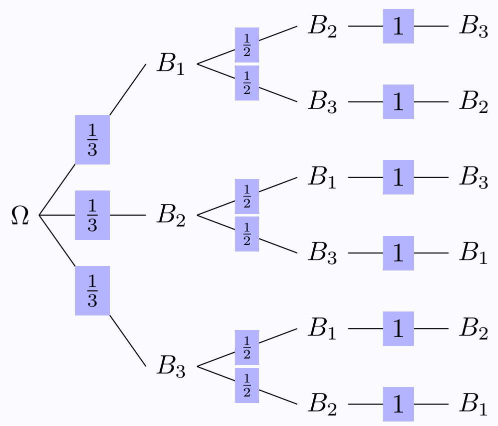
Elle a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à 0,05 et, d'autre part, qu'elle oublie son portable chez elle un jour sur dix.

1. D et O sont indépendants, donc $\overline{D}$ et O aussi. Ainsi,
$$\begin{aligned} P(\overline{D} \cap O) &= P(\overline{D}) \times P(O) \\ &= (1 - 0{,}05) \times 0{,}1 \\ &= 0{,}095. \end{aligned}$$
Par conséquent, la probabilité pour que Jeanne oublie son portable chez elle et qu'il soit déchargé est égale à 0,095.
2. $$\begin{aligned} P(D \cup O) &= P(D) + P(O) - P(D \cap O) \\ &= 0{,}05 + 0{,}1 - 0{,}005 \\ &= 0{,}145. \end{aligned}$$
Ainsi, la probabilité pour que Jeanne ne puisse pas se servir de son portable un jour donné est égale à 0,145.

Exercice n°20

Une urne contient trois boules B_1, B_2 et B_3 indiscernables au toucher. On vide l'urne par tirages successifs des boules.

1. Construisons un arbre de probabilités :



Il y a donc 6 tirages possibles, et chaque possibilité a une probabilité de $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{6}$ d'être obtenue. Ces tirages sont donc équiprobables.

2. (a)
   - « La boule B_1 est extraite avant B_2 » est possible dans 3 cas : $B_1 - B_2 - B_3$, $B_1 - B_3 - B_2$ et $B_3 - B_1 - B_2$.
     Ainsi, $P(A) = 3 \times \dfrac{1}{6}$, soit $P(A) = \dfrac{1}{2}$.
   - B_1 est extraite au premier tirage dans 1 cas sur 3 car il y a 3 boules possibles au premier tirage.
     Donc $P(B) = \dfrac{1}{3}$.
   - La boule B_1 est extraite au deuxième tirage dans 2 cas sur 6, donc $P(C) = \dfrac{1}{3}$.

   (b) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$
   et $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \neq P(A \cap B)$.
   Ainsi, A et B ne sont pas indépendants.

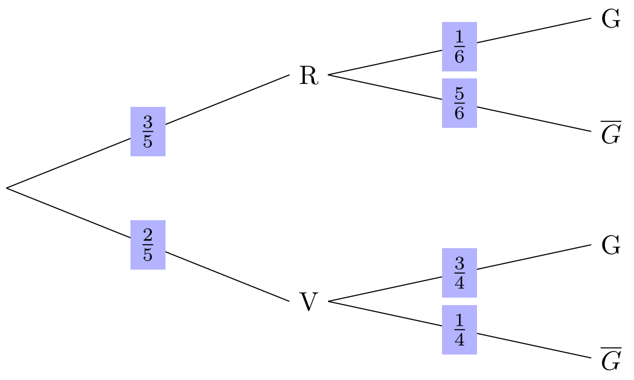
   (c) $P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$
   et $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} = P(A \cap C)$.
   Ainsi, A et C sont indépendants.

Exercice n°21

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les événements :

- R : « le jeton tiré est rouge »,
- V : « le jeton tiré est vert »,
- G : « le jeton tiré est gagnant ».

1. L'arbre de probabilité modélisant la situation est le suivant :



2. On doit ici calculer $P(V \cap G)$ qui, d'après le cours, est égale à :

$$P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(G) &= P(V \cap G) + P(V \cap \overline{G}) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{4}{10} \\ P(G) &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

4. On souhaite ici calculer $P_G(R)$ qui, d'après le cours, est égale à :

$$\begin{aligned} P_G(R) &= \frac{P(R \cap G)}{P(G)} \\ &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

5. Tirer au hasard et simultanément deux jetons revient à en tirer un, puis un autre (sans remettre le premier dans l'urne).
   On sait que la probabilité de tirer un premier jeton gagnant est $P(G) = \frac{2}{5}$ d'après la question 3. Mais une fois ce jeton choisi, nous avons une autre configuration :
   — si le premier jeton gagnant est rouge, alors il n'y a plus de jeton gagnant rouge pour le second tirage ; la probabilité de tirer un jeton gagnant est donc égale à :
   $$P(V \cap G) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$
   — si le premier jeton gagnant est vert, alors il y a encore un jeton rouge gagnant (sur les 9 jetons restants) et 2 jetons gagnants verts ; la probabilité de tirer un second jeton gagnant est donc égale à :
   $$\begin{aligned} P(R \cap G) + P(V \cap G) &= \frac{6}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   La probabilité de tirer simultanément deux jetons gagnants est alors égale à :
   $$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{15}.$$

Exercice n°22

Un grand journal a fait réaliser une enquête sur un échantillon représentatif de la population française des 18-34 ans.

1. $P_E(T) = 0{,}4$ et $P_R(\overline{E}) = 0{,}4$.
2. $$\begin{aligned} P(E) &= P(T) \times P_T(E) + P(R) \times P_R(E) + P(I) \times P_I(E) \\ &= 0{,}35 \times 0{,}4 + 0{,}25 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}59. \end{aligned}$$
3. $P_E(I) = \dfrac{P(I \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}75}{0{,}59} \approx 0{,}51.$
4. $P(I) = 0{,}4 \neq P_E(I)$ donc E et I ne sont pas indépendants.