

Corrigés

Série d'exercices

Classe : 1re SPE

Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 6 = 24$ (avec le projeté orthogonal de \vec{v} sur \vec{u}).

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{24}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = 2\sqrt{10}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 4$, donc :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{24}{8\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

et donc :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 18^\circ.$$

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-3) = -9$.

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{10}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 3$, donc,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{3\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}.$$

Ainsi,

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 162^\circ.$$

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \times (-6) = -48$ (les deux vecteurs sont de sens contraires donc leur produit scalaire est négatif).

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-48}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 6^2 = 37 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{37}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 8$, donc :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-48}{8\sqrt{37}} = \frac{-6\sqrt{37}}{37}$$

et donc,

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 171^\circ.$$

Exercice n°2

ABCD est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$. E est le point de $[DC]$ tel que $DE = 1$. Les droites (AE) et (BD) se coupent en H et N est le milieu de $[AB]$.

1. $\vec{AE} \cdot \vec{BD} = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \vec{AE} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AD} + \vec{DE}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CD}) \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{BC} + \vec{AD} \cdot \vec{CD} + \vec{DE} \cdot \vec{BC} + \vec{DE} \cdot \vec{CD} \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{AD} + 0 + 0 + \vec{DE} \cdot \vec{CD} \\ &= \|\vec{AD}\|^2 + \|\vec{DE}\| \times \|\vec{CD}\| \times \cos \pi \\ &= 4 - 1 \times 4. \end{aligned}$$

On en déduit alors que (AE) et (BD) sont perpendiculaires.

2. $\vec{BA} \cdot \vec{BD}$

$$\begin{aligned} &= BH \times BD \\ &= BH \times \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= BH \times 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

De plus, on a aussi :

$$\begin{aligned} \vec{BA} \cdot \vec{BD} &= BA \times BD \times \cos \widehat{ABD} \\ &= BA \times BD \times \frac{AB}{BD} \\ &= AB^2 \\ &= 16. \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$2\sqrt{5}BH = 16 \quad \text{soit} \quad BH = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} 3. \vec{HA} + \vec{HB} &= (\vec{HN} + \vec{NA}) + (\vec{HN} + \vec{NB}) \\ &= 2\vec{HN} + (\vec{NA} + \vec{NB}) \\ &= 2\vec{HN} + \vec{0} \quad (\text{car N est le milieu de } [AB]) \\ \vec{HA} + \vec{HB} &= 2\vec{HN}. \end{aligned}$$

4. $HA^2 = AB^2 - HB^2$

$$HA^2 = 16 - \frac{64}{5}$$

$$HA^2 = \frac{16}{5}$$

$$HA = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$HA = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{HN} \cdot \vec{HA} &= (\vec{HA} + \vec{AN}) \cdot \vec{HA} \\ &= \vec{HA}^2 + \vec{AN} \cdot \vec{HA} \\ &= \frac{16}{5} - \vec{AN} \cdot \vec{AH}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{5} - 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \cos \widehat{HAN} \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{AH}{AB} \quad (\text{dans le triangle HAB rectangle en H}) \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{16}{5} - \frac{8}{5} \\
\overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} &= \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

5. Dans le triangle BAH rectangle en H, [HN] est la médiane issue du sommet de l'angle droit, donc :

$$HN = \frac{1}{2}AB \quad \text{soit} \quad HN = 2.$$

6. $\overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} = HN \times HA \times \cos \widehat{AHN}$

$$\begin{aligned}
\frac{8}{5} &= \frac{8\sqrt{5}}{5} \cos \widehat{AHN} \\
\cos \widehat{AHN} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\
\widehat{AHN} &\approx 63^\circ.
\end{aligned}$$

Exercice n°3

Soit ABCD un carré. On pose :

Faisons avant tout une figure :

1. Pour calculer $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB}$, on peut projeter K sur (AB) ; on obtient un point K' au milieu de [AI]. Ainsi,

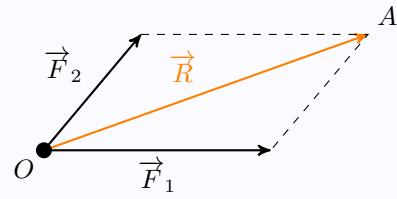
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} &= AK' \times AB \\
&= \frac{1}{2}AI \times AB \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}AB \times AB \\
&= \frac{1}{4}AB^2.
\end{aligned}$$

2. Démontrer que (AK) et (JB) sont perpendiculaires est équivalent à démontrer que $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BJ} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}) \\
&= \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA}}_{= \overrightarrow{0}} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AJ} \\
&= AD \times AJ - \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{JA} \\
&= \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}AB^2 - DJ \times JA \\
&= \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}AD^2 - \frac{1}{4}AD^2 = 0.
\end{aligned}$$

Exercice n°4

1. Illustrons la situation avec un schéma :



Construisons le point A de sorte à former un parallélogramme.

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\|^2 - \|\overrightarrow{F_1}\|^2 - \|\overrightarrow{F_2}\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{R}\|^2 - \|\overrightarrow{F_1}\|^2 - \|\overrightarrow{F_2}\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{R}\|^2 - 300^2 - 200^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{R}\|^2 - 130\,000).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} &= \|\overrightarrow{F_1}\| \times \|\overrightarrow{F_2}\| \times \cos F_1 F_2 \\
&= 200 \times 300 \times \cos 50^\circ \\
&= 60\,000 \cos 50^\circ.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{R}\|^2 - 130\,000) = 60\,000 \cos 50^\circ.$$

d'où :

$$\|\overrightarrow{R}\|^2 = 120\,000 \cos 50^\circ + 130\,000$$

et donc :

$$\|\overrightarrow{R}\| = \sqrt{120\,000 \cos 50^\circ + 130\,000} \approx$$

La résultante à donc une intensité d'environ 455 N.

$$\begin{aligned}
2. \quad (a) \quad W &= \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u} \\
&= \|\overrightarrow{F}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{u}) \\
&= 2000 \times 50 \times \cos 45^\circ \\
&= 50\,000\sqrt{2} \\
&\approx 70\,711 \text{ J.}
\end{aligned}$$

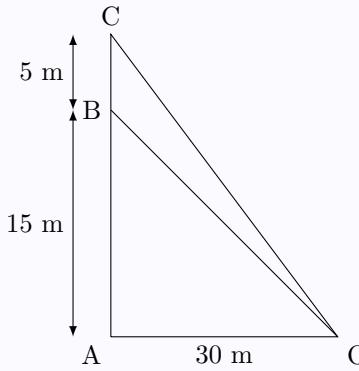
Le travail de la force est alors égal à 70 711 Joules.

- (b) Notons $\overrightarrow{F'}$ la force exercée par un bateau se déplaçant dans la même direction que la péniche. On veut alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F'} \cdot \overrightarrow{u} &= 70\,711 \\
\iff \|\overrightarrow{F'}\| \times 50 \times \cos(\overrightarrow{F'}, \overrightarrow{u}) &= 70\,711 \\
\iff \|\overrightarrow{F'}\| &= \frac{70\,711}{50} \approx 1\,414
\end{aligned}$$

L'intensité de la force du bateau doit donc être environ égale à 1 414 N.

Exercice n°5



$$\begin{aligned}
 1. \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) \\
 &= \overrightarrow{OA}^2 + \underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
 \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= OA^2 + AB \times AC.
 \end{aligned}$$

2. On sait que :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \times OC \times \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}).$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$OA^2 + AB \times AC = OB \times OC \times \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}).$$

On en déduit alors :

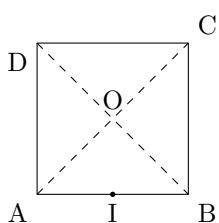
$$\begin{aligned}
 \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) &= \frac{OA^2 + AB \times AC}{OB \times OC} \\
 &= \frac{900 + 15 \times 20}{\sqrt{30^2 + 15^2} \times \sqrt{30^2 + 20^2}} \\
 &\approx 0,992277876714.
 \end{aligned}$$

D'où, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \approx 7^\circ$.

Exercice n°6

Soit ABCD un carré de centre O tel que $AB = 2$. On pose I le milieu de [AB].

Faisons une figure avant tout.



1. Soit M un point quelconque du plan. Notons H son projeté orthogonal sur (AB).

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} &= 2 \iff AB \times AH = 2 \\
 &\iff AH = 1.
 \end{aligned}$$

Donc $H \in [AB]$ (car le produit scalaire est positif) et H est confondu avec I, ce qui signifie que M est sur la droite perpendiculaire à (AB) passant par I.

M est donc sur (OI).

$$\begin{aligned}
 2. \quad (a) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
 &= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
 &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + IA \times IB \times \cos IBIA \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 1.$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4 &\iff MI^2 - 1 = 4 \\
 &\iff MI^2 = 5 \\
 &\iff MI = \sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

Or, $IB = 1$ et $BC = 2$ donc on s'aperçoit que $IC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ et donc que $IC = \sqrt{5}$.

Par conséquent, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I passant par C.

Exercice n°7

On considère deux points A et B tels que $AB = 6$, ainsi que I le milieu de [AB].

On pose \mathcal{E}_k l'ensemble des points M tel que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k,$$

où $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
 &= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
 &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + IA \times IB \times \cos(IA, IB) \\
 &= MI^2 + 3 \times 3 \times \cos \pi
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9.$$

2. \mathcal{E}_{16} est l'ensemble des points M tels que $MAMB = 16$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$MI^2 - 9 = 16 \quad \text{soit} \quad MI^2 = 16 + 9 = 25 \text{ et donc } MI = 5.$$

Ainsi, \mathcal{E}_{16} est le cercle de centre I et de rayon 5.

3. $\mathcal{E}_k = \emptyset$ s'il n'existe pas de points M vérifiant l'égalité :

$$MI^2 - 9 = k \quad \text{soit} \quad MI^2 = k + 9.$$

Ceci est le cas si $k + 9 < 0$ (car un carré est toujours positif ou nul), ce qui implique que $k < -9$. Ainsi, pour $k < -9$, $\mathcal{E}_k = \emptyset$.

Exercice n°8

1. ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AC = 6$.

- (a) On sait que :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} (6^2 - 5^2 - 3^2) \\
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= AB \times AD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \\
 1 &= 5 \times 3 \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \\
 \cos \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) &= \frac{1}{15} \\
 (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) &\approx 86^\circ.
 \end{aligned}$$

2. $EFGH$ est un parallélogramme tel que $EF = 6$, $EH = FH = 5$.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{EF}\|^2 + \|\overrightarrow{EH}\|^2 - \|\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EH}\|^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{EF}\|^2 + \|\overrightarrow{EH}\|^2 - \|\overrightarrow{HF}\|^2) \\
 &= \frac{1}{2} (6^2 + 5^2 - 5^2) \\
 \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} &= 18.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} &= EF \times EH \times \cos(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EH}) \\
 18 &= 6 \times 5 \times \cos(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EH}) \\
 \cos(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}) &= \frac{18}{30} \\
 (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}) &\approx 53^\circ.
 \end{aligned}$$

3. $IJKL$ est un parallélogramme tel que $IK = 8,5$ et $JL = 5$.

(a) Dans cette question, on va toujours utiliser la propriété ??, mais pas la même égalité.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} &= \frac{1}{4} (\|\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL}\|^2 - \|\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IL}\|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (\|\overrightarrow{IK}\|^2 - \|\overrightarrow{LJ}\|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (8,5^2 - 5^2) \\
 \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} &= \frac{189}{16}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IJ} \cdot (\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL}) \\
 &= \\
 \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} &= \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} \\
 &= IJ^2 + \frac{189}{16}.
 \end{aligned}$$

(c) Par définition,

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \|\overrightarrow{IJ}\| \times \|\overrightarrow{IK}\| \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = 8,5 \times IJ \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$$

D'après la question précédente, ce même produit scalaire est égal à $IJ^2 + \frac{189}{16}$, donc

$$IJ^2 + \frac{189}{16} = 8,5 \times IJ \times \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}),$$

c'est-à-dire :

$$IJ^2 - 8,5 \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) IJ + \frac{189}{16} = 0, \quad (\text{E})$$

(d) L'équation (E) est une équation quadratique d'inconnue IJ qui admet au moins une solution (car le parallélogramme existe) donc son discriminant doit être supérieur ou égal à 0 :

$$[8,5 \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})]^2 - 4 \times 1 \times \frac{189}{16} \geq 0$$

soit,

$$\cos^2(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) \geq \frac{189}{4} \times \frac{1}{8,5^2}$$

et donc,

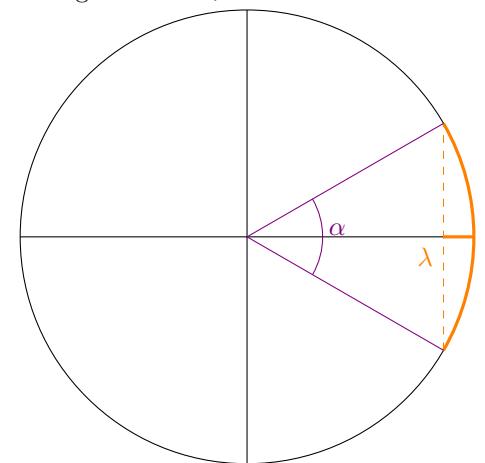
$$\cos^2(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) \geq \frac{189}{289}.$$

(e) D'après la question précédente, $\cos^2(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) \geq \frac{189}{289}$.

Comme $0 \leq (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) < 90^\circ$ (comme angle formé par un côté et une diagonale d'un parallélogramme), on en déduit que $\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) > 0$, d'où :

$$\cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) \geq \sqrt{\frac{189}{289}}.$$

Regardons sur le cercle trigonométrique ce que signifie l'inégalité $\cos \alpha \geq \lambda$:



À la calculatrice, on trouve que l'angle positif dont le cosinus est égal à $\sqrt{\frac{189}{289}}$ est à peu près 36° .

Ainsi, on a :

$$0 \leq (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) \leq 36^\circ.$$

Exercice n°9

Dans le plan, on considère un point M et un cercle Γ , de centre O et de rayon r .

Soit d une droite passant par M et coupant Γ en deux points A et B .

On appelle *puissance de M par rapport à Γ* le nombre : $P_\Gamma(M) = OM^2 - r^2$.

1. On considère le point H , projeté orthogonal de O sur (AB) .

Ainsi, H est le milieu de $[AB]$ (car AOB est isocèle en O et dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est la médiatrice du côté opposé). Donc :

$$\overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA}.$$

Nous allons calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) \\
 &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) \\
 &= MH^2 - HA^2
 \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 \quad \text{et} \quad HA^2 = OA^2 - OH^2 = r^2 - OH^2$$

donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= MH^2 - HA^2 \\ &= OM^2 - OH^2 - r^2 + OH^2 \\ &= OM^2 - r^2 \\ &= \mathcal{P}(M). \end{aligned}$$

Ainsi,

— si M est à l'extérieur du cercle,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \times MB = \mathcal{P}(M)$$

car A et B sont du même côté par rapport à M.

— Si M est à l'intérieur du cercle,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \times MB = \mathcal{P}(M)$$

car A et B sont de part et d'autre de M.

2. Avant tout, faisons un schéma :

— d_2 l'axe radical de Γ et Γ'' ;

— d_3 l'axe radical de Γ' et Γ'' .

$\Gamma'' \notin (OO')$ donc d_1 et d_2 sont sécantes. Appelons J leur intersection. Par définition des deux droites,

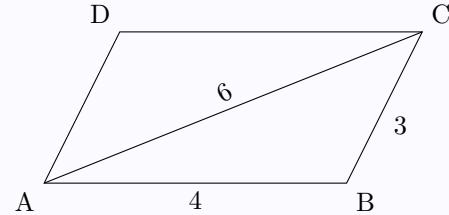
$$\mathcal{P}_\Gamma(J) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(J) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_\Gamma(J) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(J)$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{\Gamma'}(J) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(J)$, et donc $J \in d_3$.

J est donc le point de concours de d_1 , d_2 et d_3 .

Exercice n°10

On considère la figure suivante :



ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $BC = 3$ et $AC = 6$.

Il est assez aisément de voir,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(4^2 + 6^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (16 + 36 - 9). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{43}{2}.$$

Exercice n°11

On considère un carré ABCD de côté 1.

Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$,

$$\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

où x est un nombre réel inconnu. On cherche à déterminer la valeur de x .

$$\begin{aligned} (AF) \perp (DE) &\iff DE \cdot AF = 0 \\ &\iff 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}x = 0 \\ &\iff x = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(a) M est tel que $\mathcal{P}_\Gamma(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M)$ donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Gamma(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M) &\iff OM^2 - r^2 = O'M^2 - r'^2 \\ &\iff OM^2 - O'M^2 = r^2 - r'^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $r - r'^2 = MO^2 - MO'^2$

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{MO'}^2 \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}) \\ &= 2MO' \cdot O \end{aligned}$$

$= 2KIO' \cdot O$ car K est le projeté orthogonal de M sur (OO') donc être tel que :

$$r - r'^2 = 2OO' \cdot IK.$$

(b) Il existe un unique point K tel que :

$$2OO' \cdot IK = r^2 - r'^2$$

D'après la question précédente, l'ensemble des points M ayant les mêmes puissances par rapport aux deux cercles est la droite perpendiculaire à (OO') passant par K.

(c) Notons :

— d_1 l'axe radical de Γ et Γ' ;

$$\overrightarrow{BF} = (2 + \sqrt{3}) \overrightarrow{BC}.$$