Corrigés

Série d'exercices | Classe : 1re SPE | Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est définie par sa *relation de récurrence* ou par sa *formule explicite*. Donner ensuite les valeurs des 4 premiers termes.

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout entier naturel n.
   (u_n) est ici définie à l'aide d'une formule explicite (en fonction de n, sans faire référence au terme précédent).

   Les trois premiers termes de cette suite sont :
   — $u_0 = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$.
   — $u_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$.
   — $u_2 = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 3$.

2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$
   (u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence (le terme u_{n+1}, de rang $n+1$, est défini en fonction de u_n, donc de son terme précédent).

   Les trois premiers termes de cette suite sont :
   — $u_0 = -2$ (donné).
   — $u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times (-2) - 2 = -8$.
   — $u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times (-8) - 2 = -26$.

3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 1n \end{cases}$
   (u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence.

   Les trois premiers termes de cette suite sont :
   — $u_0 = 1$ (donné).
   — $u_1 = u_0^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$.
   — $u_2 = u_1^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$.

4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$
   (u_n) est ici définie à l'aide d'une relation de récurrence (le terme u_{n+1}, de rang $n+1$, est défini en fonction de u_n, donc de son terme précédent, même s'il y a un terme en n avec lui).

   Les trois premiers termes de cette suites sont :
   — $u_0 = 1$ (donné).
   — $u_1 = u_{0+1} = 2u_0 - 3 \times 0 = 2 \times 1 = 2$.
   — $u_2 = u_{1+1} = 2u_1 - 3 \times 1 = 2 \times 4 - 3 = 5$.

Exercice n°2

Étudie du sens de variation des suites (u_n).

1. $u_n = \dfrac{2^n}{5}$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\ &= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\ &= \frac{2^n}{5}. \end{aligned}$$
$u_{n+1} - u_n > 0$.

2. $u_n = \dfrac{2^n}{5}$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\ &= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\ &= \frac{2^n}{5} \end{aligned}$$
$u_{n+1} - u_n > 0$.

   Ainsi, (u_n) est croissante.

3. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2) \\ &= -(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\ &= -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\ &= -2n + 4. \end{aligned}$$
   $-2n + 4 > 0 \iff -2n > -4 \iff n < 2$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour $n \geqslant 2$.
   La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 2.

3. $u_n = \sqrt{n^2 + 3}$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{(n+1)^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 3} \\ &= \sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 + 3}. \end{aligned}$$
   Or, $n^2 + 4 > n^2 + 3$ donc $n^2 + 2n + 4 > n^2 + 3$ (car $n \geqslant 0$), donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
   Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

4. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5$.
   $u_{n+1} - u_n = u_n - 5 - u_n = -5 < 0$ donc (u_n) est décroissante.

Exercice n°3

On définit la suite (u_n) par la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2n+1}{n+2}.$$

1. On calcule pour tout entier naturel n :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$
   $n + 2 > 0$ et $n + 3 > 0$ car $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.

2. Si la suite (u_n) est majorée par 2, alors $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= \frac{2n+1}{n+2} - 2 \\ &= \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2(n+2)}{n+2} \\ &= \frac{2n+1-2n-4}{n+2} \\ &= \frac{-3}{n+2}. \end{aligned}$$

$-3 < 0$ et $n+2 > 0$ donc $u_n - 2 < 0$, soit $u_n < 2$.

Donc la suite est majorée par 2.

3. La suite est croissante donc, nécessairement, $u_n \geqslant u_0$ pour tout entier naturel n, soit $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

La suite est donc minorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice n°4

La suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

est croissante. En effet, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2+1} - u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{u_n^2+1} - u_n\right)\left(\sqrt{u_n^2+1} + u_n\right)}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n} \\ &= \frac{u_n^2 + 1 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1} + u_n}. \end{aligned}$$

$u_n > 0$ car chaque terme est défini comme étant égal à une racine carrée.
De plus, $\sqrt{u_n^2+1} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite est donc croissante.

Exercice n°5

On définit la suite (u_n) par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,.$$

1. $$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

2. $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$.

Or, $n+2 > n$ donc $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ et donc, en ajoutant $\sqrt{n+1}$ aux deux membres de cette dernière inégalité, on a $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
En inversant, on obtient : $\dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (attention à ne pas oublier d'inverser le signe de l'inégalité).
Ceci nous dit alors que $u_{n+1} < u_n$, et donc que (u_n) est décroissante.

3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$ donc $u_n > 0$.
(u_n) est donc minorée par 0.

De plus, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geqslant 1$ (car $\sqrt{n+1} \geqslant 1$ et $\sqrt{n} \geqslant 0$) donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \leqslant 1$, soit $u_n \leqslant 1$.
(u_n) est donc majorée par 1.

Exercice n°6

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - u_n + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc (u_n) est croissante.

Exercice n°7

Dans chaque cas, dire si la suite (u_n) est arithmétique. Si tel est le cas, donner le premier terme u_0 et la raison de la suite, ainsi que la relation de récurrence.

1. $u_n = 3 + 2n$.
La fonction $x \mapsto 3 + 2x$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 3$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = 2$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de $(u_n$ est :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

2. $u_n = -3n + 4$.
La fonction $x \mapsto -3x + 4$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 4$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = -3$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

3. $u_n = 2n^2 - 1$.
La fonction $x \mapsto 2x^2 - 3$ n'est pas une fonction affine, donc $f(n) = u_n$ n'est pas une suite arithmétique.
Autre méthode : $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 7$.
Ainsi, $u_1 - u_0 = 2$ et $u_2 - u_1 = 6 \neq u_1 - u_0$ donc la suite n'est pas arithmétique.
4. $u_n = 3(n-2) - 2(n+1)$.
On peut écrire : $u_n = 3n - 6 - 2n - 2 = n - 8$. La fonction $x \mapsto x - 8$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = -8$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = 1$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = -8 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$$

5. $u_n = \dfrac{5n+7}{2}$.
On peut écrire : $u_n = \dfrac{5n}{2} + \dfrac{7}{2} = \dfrac{5}{2}n + \frac{7}{2}$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{5}{2}x + \dfrac{7}{2}$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = \dfrac{7}{2}$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = \dfrac{5}{2}$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2} \end{cases}$$

6. $u_n = n\sqrt{5}$.
La fonction $x \mapsto x\sqrt{5}$ est une fonction affine (même linéaire) donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 0$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = \sqrt{5}$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{5} \end{cases}$$

7. $u_n = 3 - n\sqrt{2}$.
La fonction $x \mapsto 3 - x\sqrt{2}$ est une fonction affine donc $f(n) = u_n$ est une suite arithmétique. Son premier terme est $u_0 = f(0) = 3$ et sa raison r est le coefficient de n, donc ici $r = -\sqrt{2}$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{2} \end{cases}$$

8. $u_n = 7 - \dfrac{3}{n+2}$.
$u_0 = 7 - \dfrac{3}{0+2} = \dfrac{11}{2}$.
$u_1 = 7 - \dfrac{3}{1+2} = 6$.
$u_2 = 7 - \dfrac{3}{2+2} = \dfrac{25}{4}$.
Ainsi, $u_1 - u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{4} \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
9. $u_n = 3$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 3 - 3 = 0$, qui est un nombre constant, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0$ et de premier terme $u_0 = 3$.
Dans ce cas, la relation de récurrence de (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$$

Exercice n°8

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est arithmétique. Si tel est le cas, donner le terme général en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{2} \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - \sqrt{2}) - u_n = -\sqrt{2}.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque est donc toujours la même ; par conséquent, (u_n) est une suite arithmétique, ici de raison $r = -\sqrt{2}$.

D'après le cours, son terme général est :

$$u_n = u_0 + nr = -1 - n\sqrt{2}.$$

2. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = u_n + 1.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque n'est donc pas toujours la même ; par conséquent, (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
3. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 + 3) - u_n = u_n^2 - u_n + 3.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque n'est donc pas toujours la même ; par conséquent, (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
4. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$. D'après cette définition, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 2) - u_n = 2.$$

La différence entre deux termes consécutifs quelconque est donc toujours la même ; par conséquent, (u_n) est une suite arithmétique, ici de raison $r = -2$.

D'après le cours, son terme général est :

$u_n = u_1+(n-1)r = -1+(n-1)\times(-2) = -1-2n+2 = 1-2n$.

Exercice n°9

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.

1. $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r.
   On sait que :
   $$u_n = u_0 + nr$$
   donc :
   $$\begin{aligned} u_8 &= u_0 + 8r \\ 7 &= 3 + 8r \\ 7 - 3 &= 8r \\ r &= \frac{4}{8} \\ r &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r.
   On sait que :
   $$u_n = u_k + (n-k)r$$
   donc
   $$\begin{aligned} u_5 &= u_2 + (5-2)r \\ 2 &= 5 + 3r \\ 2 - 5 &= 3r \\ 3r &= -3 \\ r &= -1. \end{aligned}$$

3. $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9.
   On sait que :
   $$u_n = u_0 + nr$$
   donc
   $$\begin{aligned} u_9 &= u_0 + 9r \\ u_9 &= 5 - \frac{9}{2} \\ u_9 &= \frac{10}{2} - \frac{9}{2} \\ u_9 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20}.
   On sait que :
   $$u_n = u_k + (n-k)r$$
   donc
   $$\begin{aligned} u_{20} &= u_5 + (20-5)r \\ u_{20} &= 6 + 15 \times 2 \\ u_{20} &= 6 + 30 \\ u_{20} &= 36. \end{aligned}$$

5. $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r.
   On sait que :
   $$u_n = u_k + (n-k)r$$
   donc
   $$\begin{aligned} u_7 &= u_2 + (7-2)r \\ \sqrt{2} &= \sqrt{7} + 5r \\ 5r &= \sqrt{2} - \sqrt{7} \\ r &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{5}. \end{aligned}$$

Exercice n°10

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
   (u_n) est une suite arithmétique donc :
   $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$
   donc ici :
   $$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= \frac{5 + (5 + 100 \times 3)}{2} \times 101 \\ &= 155 \times 101 \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= 15\,655. \end{aligned}$$

2. Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
   $$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} &= \frac{3+60}{2} \times 51 \\ &= 31{,}5 \times 51 \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= 1\,606{,}5. \end{aligned}$$

3. Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
   $$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \\ &= \frac{60 + (60 + 5 \times 99)}{2} \times 100 \\ &= \frac{61\,500}{2} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= 30\,750. \end{aligned}$$

4. Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.
   $$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 \\ &= \frac{50+1}{2} \times 50 \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= 1\,275. \end{aligned}$$

Exercice n°11

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 7\,820$ et $u_2 = 6\,712$.

1. (u_n) étant arithmétique, $u_2 - u_0 = 2r$.
   Or, $u_2 - u_0 = 6\,712 - 7\,820 = -1\,108$. Donc $2r = -1\,108$, d'où $r = -554$.
   Ainsi, la relation de récurrence de (u_n) est :
   $$\begin{cases} u_0 = 7\,820 \\ u_{n+1} = u_n - 554 \end{cases}.$$

2. D'après la formule du cours, $u_n = u_0 + nr$, donc ici, pour tout entier naturel n :

$$\underline{u_n = 7\,820 - 554n}.$$

3. Il s'agit ici de trouver le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 1\,000$. Pour cela, on va calculer tous les termes successifs jusqu'à celui qui est inférieur à 1 000.

Il y a deux façons de procéder :

— **à l'aide de la relation de récurrence de la suite :**

```
u = 7820 # premier terme
n = 0    # rang du premier terme
while u >= 1000:
    n = n + 1
    u = u - 554 # on calcul le terme suivant

print( n )
```

— **à l'aide de la formule explicite :**

```
u = 7820 # premier terme
n = 0    # rang du premier terme
while u >= 1000:
    n = n + 1
    u = 7820 - 554*n # on calcul le terme



print( n )
```

Dans les deux cas, le résultat est le même : 13

Ce qui signifie que u_{13} est le premier terme à être inférieur à 1 000.

Pour le vérifier par le calcul, on résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_n < 1\,000 &\iff 7\,820 - 554n < 1\,000 \\ &\iff -554n < 1\,000 - 7\,820 \\ &\iff -554n < -6\,820 \\ &\iff n > \frac{-6\,820}{-554} \\ &\iff n > 12{,}31\ldots \end{aligned}$$

Comme n est un entier, cela signifie que le premier n possible est $n = 13$, ce qui correspond bien au résultat de nos programmes Python.

Exercice n°12

Des archéologues du XXX^e siècle découvrent dans une grotte une balance électronique à côté de laquelle se trouvent des sacs et une pancarte sur laquelle est écrite :

En procédant ainsi, l'archéologue dispose en tout sur la balance :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 73 = \frac{73 \times 74}{2} = 2\,701 \text{ pièces.}$$

Si les pièces pesaient toutes 5 g, cela représenterait une masse totale égale à :

$$2\,701 \times 5 = 13\,505 \text{ g.}$$

Mais certaines pièces ne pèsent que 4,5 g.

Supposons qu'elles soient extraites du sac k, pour $1 \leqslant k \leqslant 73$. La masse totale est alors égale, en grammes, à :

$$\begin{aligned} & 1\times 5 + 2\times 5 + \cdots + k \times 4{,}5 + \cdots + 73 \times 5 \\ =\ & 1\times 5 + 2\times 5 + \cdots + 5k - 0{,}5k + \cdots + 73 \times 5 \\ =\ & 1\times 5 + 2\times 5 + \cdots + k \times 5 + \cdots + 73 \times 5 - 0{,}5k \\ =\ & 13\,505 - 0{,}5k. \end{aligned}$$

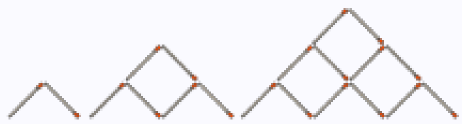
Ainsi, comme la balance indique une masse de 13 489 grammes, on a :

$$\begin{aligned} 13\,505 - 0{,}5k = 13\,489 &\iff 0{,}5k = 13\,505 - 13\,489 \\ &\iff 0{,}5k = 16 \\ &\iff k = \frac{16}{0{,}5} = 32. \end{aligned}$$

Le 32^e sac contient donc les pièces de 4,5 grammes.

Exercice n°13

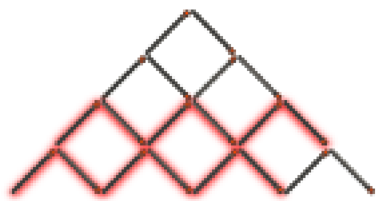
Cédric souhaite construire sur une table, à plat, un « château d'allumettes » à plusieurs étages, comme sur le schéma suivant :



— 2 allumettes sont nécessaires pour le 1^er étage ;
— 4 allumettes sont nécessaires pour le 2^e ;
— 6 allumettes sont nécessaires pour le 3^e
— etc.

On note (u_n) le nombre d'allumettes nécessaires pour le n-ième étage, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 6$.

1. Pour 4 étages, nous avons :



On ajoute 2 allumettes par rapport au nombre d'allumettes nécessaires pour l'étage précédent.

Ainsi, $\underline{u_4 = 6 + 2 = 8}$.

2. Comme mentionné dans la réponse précédente, pour construire l'étage $n+1$, il est nécessaire d'avoir u_n allumettes (nombre d'allumettes pour construire l'étage n) et d'en ajouter 2.

Ainsi, $u_{n+1} = u_n + 2$, ce qui correspond à la relation de récurrence d'une suite arithmétique de raison 2.

3. Le nombre total d'allumettes pour construire 20 étages correspond à :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} &= 20 \times \frac{u_1 + u_{20}}{2} \\ &= 20 \times \frac{2 + (2 + (20-1) \times 2)}{2} \\ &= 20 \times 21 \\ &= 420. \end{aligned}$$

Il est donc nécessaire d'avoir 420 allumettes pour construire 20 étages.

4. Le programme Python complété est le suivant :

```
u = 2
S = 0

for n in range(20):
    S = S + u
    u = u + 2

print(S)
```

Explications :

— On commence par initialiser la variable u à 2 ; elle représente u_1.
— On initialise ensuite la variable S à 0 ; elle représentera la somme des allumettes.
— On crée ensuite une boucle « Pour » car on connaît le nombre d'étages (20) ; il faudra donc ajouter 20 termes pour obtenir la somme totale.
— Dans cette boucle, on commence par ajouter à la valeur déjà stockée en S la valeur qui est dans u...
— ... puis on calcule le u suivant en écrivant que c'est l'ancienne valeur de u à laquelle on ajoute 2 (la raison de la suite) : « u = u+2 » est la traduction de la relation $u_{n+1} = u_n + 2$.
— Une fois la boucle terminée, on affiche la valeur stockée dans S.

Si on exécute ce programme pas à pas, on a :

Valeurs de n	-	0	1	2	...	19
Valeurs de S	0	$0+2=2$	$2+4=6$	$6+6=12$	...	$380+40=420$
Valeurs de u	2	$2+2=4$	$4+2=6$	$6+2=8$	...	$40+2=42$

La dernière valeur de S est la valeur trouvée à la question précédente, à savoir 420.

Exercice n°14

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

1. $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q.
On sait que :
$$u_n = u_0 \times q^n$$
donc
$$u_2 = u_0 \times q^2$$
$$12 = 5 \times q^2$$
$$q^2 = \frac{12}{5}$$
$$q = \sqrt{\frac{12}{5}} \quad \text{ou} \quad q = -\sqrt{\frac{12}{5}}.$$

2. $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9.
On sait que :
$$u_n = u_0 \times q^n$$
donc
$$u_9 = u_0 \times q^9$$
$$u_9 = 3 \times 2^9$$
$$u_9 = 1\,536.$$

3. $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8.
On sait que :
$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$
donc
$$u_8 = u_2 \times q^{8-2}$$
$$u_8 = 8 \times 2^{-6}$$
$$u_8 = 2^{-3}.$$

4. $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10}.
On sait que :
$$u_n = u_0 \times q^n$$
donc
$$u_{10} = u_0 \times q^{10}$$
$$u_{10} = 2 \times 3^{-10}$$
$$u_{10} = \frac{2}{3^{10}}.$$

5. $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7.
On sait que :
$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$
donc
$$u_7 = u_5 \times q^{7-5}$$
$$u_7 = 2 \times \sqrt{2}^2$$
$$u_7 = 4.$$

Exercice n°15

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

1. Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
(u_n) est une suite géométrique donc :
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$
Donc ici,
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} = \frac{1 - 2^{101}}{1-2}$$
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} = 2^{101} - 1.$$

2. Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{51}}}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= 3\left(1 - \frac{1}{2^{51}}\right) \times 2$$
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} = 6\left(1 - \frac{1}{2^{51}}\right).$$

3. Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= u_1 \times \frac{1-q^{100}}{1-q} \\ &= 60 \times \frac{1-\frac{1}{3^{100}}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= 60\left(1-\frac{1}{3^{100}}\right) \times \frac{3}{2} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= 45\left(1-\frac{1}{3^{100}}\right). \end{aligned}$$

4. Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} &= 50 \times \frac{1-10^{50}}{1-10} \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_5 &= \frac{50}{9}\left(10^{50}-1\right). \end{aligned}$$

Exercice n°16

Un mot de passe est composé de 1 à 25 caractères choisis parmi une liste de 70 symboles.
Donner un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe possibles.

— Si le mot de passe comporte 1 seul caractère, alors il y a 70 possibilités (car un caractère est choisi parmi 70 symboles) ;
— si le mot de passe comporte 2 caractères, il y a 70^2 possibilités ;
— si le mot de passe comporte 3 caractères, il y a 70^3 possibilités ; etc.

Ainsi, le nombre total de possibilités est :

$$S = 70 + 70^2 + 70^3 + \cdots + 70^{25}$$

car il y a au plus 25 caractères dans le mot de passe.

$$\begin{aligned} S &= 70\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{24}\right) \quad \text{avec } q = 70 \\ &= 70 \times \frac{q^{25}-1}{q-1} \\ &= 70 \times \frac{70^{25}-1}{70-1} \\ &= \frac{70}{70-1} \times \left(70^{25}-1\right). \end{aligned}$$

On peut considérer que $\frac{70}{70-1}$ est proche de 1 et que $70^{25}-1$ est proche de 70^{25}.

Ainsi, un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe est 70^{25}.

Mais par « ordre de grandeur », on peut comprendre « une puissance de 10 ». Nous allons donc aller plus loin.

$$\begin{aligned} 70^{25} &= (7 \times 10)^{25} \\ &= 7^{25} \times 10^{25} \\ &= 7 \times 7^{24} \times 10^{25} \\ &= 7 \times \left(7^2\right)^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 50^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 5^{12} \times 10^{12} \times 10^{25} \\ &\approx 7 \times 2 \times 10^8 \times 10^{37} \\ &\approx 14 \times 10^{45} \\ &\approx 10^{46}. \end{aligned}$$

Petite précision : j'ai calculé 5^{12} à l'aide de la calculatrice pour écrire que c'était à peu près égal à 2×10^8.

Exercice n°17

1. Par définition, $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$ pour $n \geqslant 1$, avec $c_1 = 10$.
   De plus, $\ell_{n+1} = \frac{2\pi c_{n+1}}{4} = \frac{\pi}{2}c_{n+1}$ (longueur d'un quart de cercle de rayon c_{n+1}).
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} \ell_{n+1} &= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}c_n \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2}c_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\ell_n. \end{aligned}$$
   Ainsi, $(\ell)_n$ est géométrique. Son premier terme est $\ell_1 = \frac{\pi}{2} \times c_1 = \frac{\pi}{2} \times 10 = 5\pi$ et sa raison est $q = \frac{1}{2}$.
2. La longueur totale de la spirale formée avec 10 carrés est :
   $$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{10} &= \ell_1 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} \\ &= 5\pi \times \frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 5\pi \times \left(1-\frac{1}{2^{10}}\right) \times 2 \\ &= 10\pi\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right) \\ &= 10\pi\left(1-\frac{1}{1\,024}\right) \\ &= \frac{5\,115\pi}{512} \qquad \text{(valeur exacte)} \\ &\approx 31{,}4 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Exercice n°18

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie de façon explicite.
Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1. $u_n = 3+4n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 3+4(n+1)-(3+4n) \\ &= 3+4n+4-3-4n \\ &= 4. \end{aligned}$$

$u_{n+1}-u_n = 4$ est une constante (un nombre qui ne dépend pas de n) donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r=4$ et de premier terme $u_0 = 3+4\times 0 = 3$.

2. $u_n = 8\times 2^n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{8}\times 2^{n+1}}{\cancel{8}\times 2^n} \\ &= \frac{2^n\times 2^1}{2^n} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ est une constante donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0 = 8\times 2^0 = 8$.

3. $u_n = 2\times 3^{n-1}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{2}\times 3^n}{\cancel{2}\times 3^{n-1}} \\ &= \frac{3^{n-1}\times 3}{3^{n-1}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $u_0 = 2\times 3^{0-1} = \frac{2}{3}$.

4. $u_n = \sqrt{2^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{n+1}}{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^n\times 2}{2^n}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

c $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc géométrique de raison $q=\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = \sqrt{2^0} = 1$.

5. $u_n = \frac{5}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{5}}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{\cancel{5}} \\ &= \frac{3^n}{3^n\times 3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{5}{3^0} = 5$.

6. $u_n = n(n+1)-n(n-1) = n^2+n-n^2+n = 2n$. u_n est donc de la forme u_0+nr avec $u_0=0$ et $r=2$.

   c $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $u_0=0$.

7. $u_n = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (n+2)^2-(n+1)^2 \\ &= (n+2-n-1)(n+2+n+1) \\ &= 2n+3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^2 \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1}-u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite c $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

8. $u_n = \frac{1}{3^n}+1$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{3^{n+1}}+1-\frac{1}{3^n}-1 \\ &= \frac{1}{3^n\times 3}-\frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3}-1\right) \\ &= -\frac{2}{3}\times\frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{3^{n+1}}+1}{\frac{1}{3^n}+1} \\ &= \frac{\frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{1+3^n}{3^n}} \\ &= \frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{1+3^n} \\ &= \frac{1+3^{n+1}}{3(1+3^n)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1}-u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite c $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

9. $u_n = 2^n+1$. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 2^{n+1}+1-2^n-1 \\ &= 2^n\times 2-2^n \\ &= 2^n(2-1) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}.$$

Ainsi, $u_{n+1}-u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite c $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

10. $u_n = \dfrac{\sqrt{2^n}}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \times \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, c $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Exercice n°19

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie à l'aide d'une relation de récurrence. Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1. $u_{n+1} = 3u_n$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$.
2. $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n} \neq \mathrm{c}^{\mathrm{te}} \text{ (constante).}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2} \neq \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$n'est pas géométrique.

3. $u_n = 2u_{n-1}$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.
4. $u_{n+1} = u_n - \pi$, $u_0 = 2\pi$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = \pi$.
5. $u_{n+1} = 3(u_n - 1) - 2(u_n + 1) = u_n - 5$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $r = -5$.
6. $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2} = \dfrac{1}{2}u_{n-1}$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
7. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 2$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - \left(\sqrt{u_n}\right)^2 = \sqrt{u_n}\left(1 - \sqrt{u_n}\right) \neq \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \neq \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas géométrique.

8. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 1$. La relation de récurrence de cette suite est la même que dans la question précédente. Cependant, le premier terme change.
On a ici : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{1} = 1$, etc.
Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante. On peut alors dire qu'elle est arithmétique (de raison $r = 0$) et géométrique (de raison $q = 1$).

Exercice n°20

1. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_k + (n-k)r$.
Ainsi, $u_{10} = u_2 + (10-2)r$, soit $-3 = 8 + (10-2)r$. On obtient alors $r = \dfrac{-3-8}{10-2} = -\dfrac{11}{8}$.
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}u_n &= u_2 + (n-2)r \\ u_n &= 8 - \frac{11}{8}(n-2) \\ &= 8 - \frac{11}{8}n + \frac{11}{4} \\ u_n &= \frac{43}{4} - \frac{11}{8}n.\end{aligned}$$

2. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_k + (n-k)r$.
Ainsi, $u_8 = u_0 + 8r$, soit $10 = -6 + 8r$. On obtient alors $r = \dfrac{10+6}{8} = 2$.
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}u_n &= u_0 + nr \\ u_n &= -6 + 2n.\end{aligned}$$

3. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique donc $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_2 = u_0 \times q^8$. Ainsi, $10 = 90 \times q^2$, soit $q^2 = \dfrac{1}{9}$.
Par conséquent, $q = \dfrac{1}{3}$ ou $q = -\dfrac{1}{3}$.
Il existe donc deux suites géométriques, chacune de premier terme $u_0 = 90$, l'une de raison $\dfrac{1}{3}$ et l'autre de raison $-\dfrac{1}{3}$.
4. On constate que $u_n = u_{n-1} + 4$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$.
Ainsi, la somme des 20 premiers termes est :

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} &= (\text{Nb de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier ter}}{2} \\ &= 20 \times \frac{3 + (u_1 + (20-1) \times 4)}{2} \\ &= 20 \times \frac{3 + (3 + 19 \times 4)}{2} \\ &= 20 \times \frac{82}{2} \\ &= 820.\end{aligned}$$

Le nombre total d'allumettes qu'il faut pour faire 20 étages correspond à la somme des 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, donc il faut 820 allumettes.

5. (a) $u_{n+1} = 3u_n - \dfrac{1}{3}u_n = \left(3 - \dfrac{1}{3}\right)u_n = \dfrac{8}{3}u_n$ donc u_{n+1} est de la forme qu_n donc c'est le terme général de la suite géométrique de raison $q = \dfrac{8}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

   (b) $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n$ donc u_{n+1} est de la forme qu_n avec $q = \dfrac{1}{10}$. Il définit donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{10}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

   (c) $u_n = 3 + 4(n-1) = 3 + 4n - 4 = -1 + 4n$ donc u_n est de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = -1$ et $r = 4$. C'est donc le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = -1$.

   (d) $u_{n+1} = u_n + 1$ donc c'est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$. u_n est donc le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 2$.

   (e) $u_{n+1} = 3u_n - 5$ n'est pas de la forme $u_n + r$ ou qu_n donc u_n n'est pas un terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.

6. Appelons r_n le rayon du disque ajouté à l'étape n et a_n l'aire du disque de rayon r_n.

   Alors, $r_{n+1} = \dfrac{1}{2}r_n$. Donc $(r_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

   L'aire du disque ajouté à l'étape n est $a_n = \pi \times r_n^2 = \dfrac{25\pi}{2^{2(n-1)}}$.

   $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\pi \times r_{n+1}}{\pi \times r_n} = \dfrac{r_{n+1}}{r_n} = q^2$ donc $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est aussi une suite géométrique de raison q.

   L'aire totale des disques (en cm^2) à l'étape 10 est donc :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} &= (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \\ &= 25\pi \times \frac{1 - \frac{1}{4^{10}}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{100\pi}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^{10}}\right) \\ &\approx 104{,}7. \end{aligned}$$

   L'aire totale est donc environ égale à 104,7 cm^2.

Exercice n°21

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{7}u_n + 6 \end{cases}$$

1. $u_1 = \dfrac{2}{7}u_0 + 6 = \dfrac{2}{7} \times 2 + 6 = \dfrac{4}{7} + \dfrac{42}{7} = \dfrac{46}{7}$.

   $u_2 = \dfrac{2}{7}u_1 + 6 = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{46}{7} + 6 = \dfrac{92}{49} + \dfrac{294}{49} = \dfrac{386}{49}$.

2. $v_n = u_n - \dfrac{42}{5}$.

   (a)
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n + 6 - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n + \frac{30}{5} - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n - \frac{12}{5} \\ &= \frac{2}{7}\left(u_n - \frac{12}{5} \times \frac{7}{2}\right) \\ &= \frac{2}{7}\left(u_n - \frac{42}{5}\right) = \frac{2}{7}v_n. \end{aligned}$$

   Ainsi, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{7}$ et de premier terme : $v_0 = u_0 - \dfrac{42}{5} = 2 - \dfrac{42}{5} = -\dfrac{32}{5}$.

   (b) On déduit que $v_n = v_0 \times q^n$, soit $\boxed{v_n = -\dfrac{32}{5} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^n}$.

   Or, $v_n = u_n - \dfrac{42}{5}$ donc $u_n = v_n + \dfrac{42}{5}$; ainsi, $\boxed{u_n = \dfrac{42}{5} - \dfrac{32}{5} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^n}$.

3. (a) S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique donc :

$$\begin{aligned} S &= v_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1-q} \\ &= -\frac{32}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}}{1 - \frac{2}{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{32}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}}{\frac{5}{7}} \\ &= -\frac{32}{5} \times \frac{7}{5} \times \left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right] \\ S &= -\frac{224}{25}\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right]. \end{aligned}$$

   (b) On a :

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{k=0}^{10}\left(v_k - \frac{42}{5}\right) \qquad \text{car } u_k = v_k - \frac{42}{5} \\ &= \sum_{k=0}^{10} v_k - \sum_{k=0}^{10}\frac{42}{5} \\ &= S - \frac{42}{5} \times 11 \\ &= -\frac{244}{25}\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right] - \frac{462}{5} \\ &= -\frac{224}{25} + \frac{224}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{462}{5} \\ &= \frac{224}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{224}{25} - \frac{462 \times 5}{5 \times 5} \\ S' &= \frac{224}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{2086}{25}. \end{aligned}$$