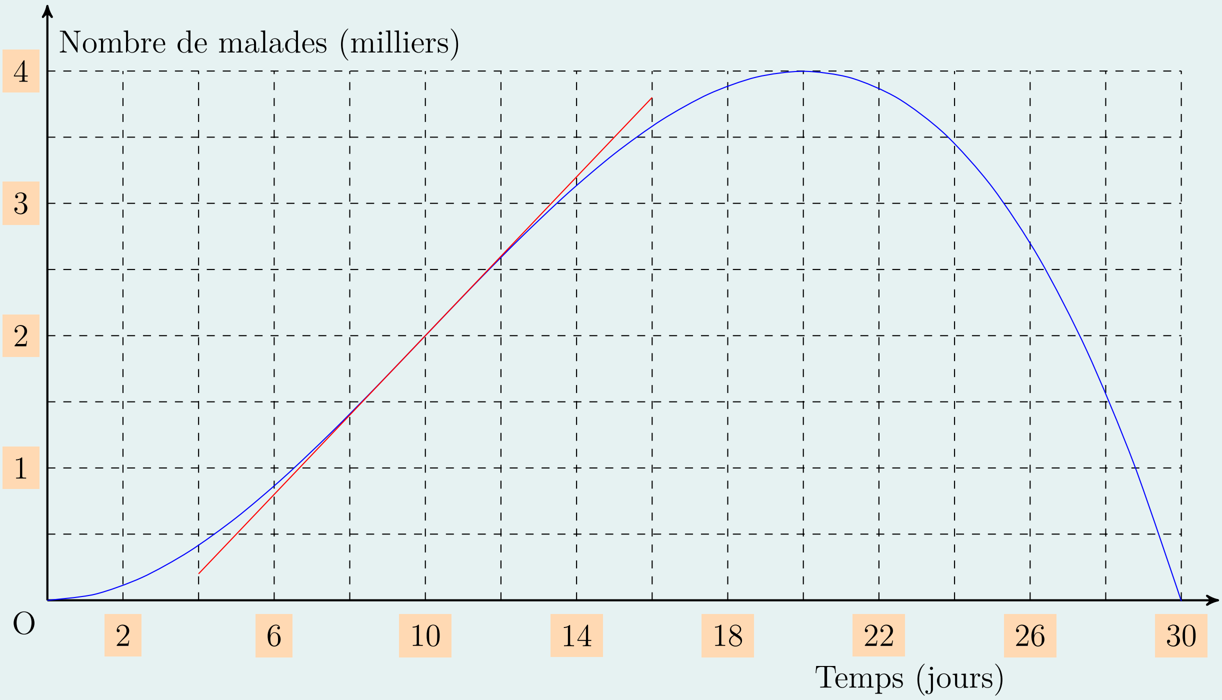
Devoir Maison n°2 : Corrigé

Exercice 1 : (4 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la vitesse de propagation d'une maladie.
Le nombre de malades en fonction du temps t, exprimé en jours, peut être modélisé par la fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$ par $f(t) = -t^3 + 30t^2$.



1. La vitesse moyenne de propagation entre le déclenchement de la maladie (0^e^ jour) et le 10^e^ jour, est donnée par :
$$\frac{f(10)-f(0)}{10-0} = \frac{2\ 000-0}{10} = 200.$$
Soit, en moyenne, 200 malades par jour.
2. Graphiquement
   (a) La maladie semble atteindre son pic le 20^e^ jour avec 4 000 malades.
   (b) La vitesse de propagation de la maladie au 20^e^ jour est nulle.
   (c) La vitesse de propagation de la maladie semble diminuer à partir du 10^e^ jour, le tracé de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 10, permet de le constater.
3. Algébriquement
   (a) $v(t) = f'(t) = -3t^2 + 60t$.
   (b) Étudions le signe de f' et le sens de variation de f.
   $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 60t = 0 \Leftrightarrow -3t(t-20) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 20.$
   f' est un polynôme de second degré admettant deux racines.
   f' est du signe opposé du coefficient principal entre les deux racines, et du même signe que le coefficient principal ailleurs.

Exercice 1 : (suite)

x	0		20		30
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0		4		0

Ainsi, la maladie atteint bel et bien son pic le 20e jour avec 4 milliers de malades. Par ailleurs, $f'(20) = 0$, ce qui veut dire que la vitesse instantanée est nulle au 20e jour.
L'équation de tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 10 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(10)(t-10) + f(10) \\ &= 300(t-10) + 2000 \\ &= 300t - 1000. \end{aligned}$$

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ 30]$ par : $g(t) = -t^3 + 30t^2 - 300t + 1000$.
g est une fonction polynôme et donc dérivable sur $[0\ ;\ 30]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(t) &= -3t^2 + 60t - 300 \\ &= -3(t-10)^2. \end{aligned}$$

On déduit alors le tableau de signe de g' et le sens de variation de g.

x	0		10		30
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	1		0		-8

Par conséquent, la vitesse de propagation de la maladie diminue effectivement à partir du 10e jour. En effet, $f(t) \leqslant 300t - 1000$ sur l'intervalle $[10\ ;\ 30]$ et $f(t) \geqslant 300t - 1000$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.
À titre d'information, en terminale, le point de coordonnées $(10\ ;\ 2\ 000)$ sera appelé un point d'inflexion. On peut l'obtenir plus rapidement en calculant la dérivée seconde $f''(t)$ et en résolvant l'équation $f''(x) = 0$.

Exercice 2 : (8 points)

1. $f : x \mapsto 5x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x}$.
   0 est une valeur interdite, car le dénominateur ne peut être nul. Ainsi, le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   f est la somme de fonctions dérivables sur D_f, donc f est dérivable sur D_f.
   Dès lors, $f'(x) = 15x^3 - x + \dfrac{1}{x^2}$.
2. $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$.
   f est le produit de la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction racine carrée définie uniquement sur $\mathbb{R}^+$. Donc, f est bien définie sur $D_f = [0\ ,\ +\infty[$.
   f est le produit de la fonction carré dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine carrée dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2 : (suite)

Posons,

$u(x) = x^2$ $\qquad$ $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 2x$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2x \times \sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x\sqrt{x}^2 + x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{5x\sqrt{x}}{2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $f'(0) = 0$. Donc, f est dérivable sur D_f.

3. -1 est une valeur interdite, car le dénominateur ne peut être nul, autrement dit, $x^3 + 1 \neq 0$. Ainsi, le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   f est le quotient de deux fonctions dérivables sur D_f, donc f est dérivable sur D_f. Posons,

   $u(x) = 3$ $\qquad$ $v(x) = x^3 + 1$

   $u'(x) = 0$ $\qquad$ $v'(x) = 3x^2.$

   Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{0(x^3+1) - 3 \times (3x^2)}{(x^3+1)^2} \\ &= \frac{-9x^2}{(x^3+1)^2}. \end{aligned}$$

4. 1 est une valeur interdite, car le dénominateur ne peut être nul, autrement dit, $x - 1 \neq 0$. Par ailleurs, la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
   f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $D_f \setminus \{0\}$, donc f est dérivable sur $D_f \setminus \{0\}$. Posons,

   $u(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $v(x) = x - 1$

   $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $v'(x) = 1.$

   Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-1-x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (suite)

5. $f : x \mapsto (1-x)^2$.
La fonction f est bien définie sur $D_f = \mathbb{R}$.
La fonction f est le composé de deux fonctions dérivables sur D_f, elle est donc dérivable sur D_f. Posons, $g(x) = x^2$. Ainsi, $g'(x) = 2x$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= [g(1-x)]' \\ &= -g'(1-x) \\ &= -2(1-x) \\ &= 2x-2. \end{aligned}$$

6. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; $\sqrt{x}+1 \neq 0$. Étant donnée que la fonction racine carrée est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est également bien définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Les deux fonctions $x \mapsto \sqrt{x}-1$ et $x \mapsto \sqrt{x}+1$ sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.
f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Posons,

$u(x) = \sqrt{x}-1$ $\qquad$ $v(x) = \sqrt{x}+1$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}. \end{aligned}$$

7. $x : t \mapsto \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2} + 1$.
La fonction polynôme x est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $x'(t) = t^2 + t$.

8. $C : q \mapsto \dfrac{q^2-2q+1}{q+1}$.
-1 est une valeur interdite, car $q+1 \neq 0$. Ainsi, $D_C = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C est le quotient de deux fonctions dérivables sur D_C, donc elle est dérivable sur D_C. Posons,

$u(q) = q^2 - 2q + 1$ $\qquad$ $v(q) = q+1$

$u'(q) = 2q-2$ $\qquad$ $v'(q) = 1$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} C'(q) &= \frac{u'(q)v(q) - u(q)v'(q)}{\left[v(q)\right]^2} \\ &= \frac{(2q-2)(q+1) - 1 \times (q^2-2q+1)}{(q+1)^2} \\ &= \frac{q^2+2q-3}{(q+1)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 3 : (6 points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^2+1 \neq 0$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R}$.
2. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur D_f. Posons,

$u(x) = x$ $\qquad$ $v(x) = x^2+1$

$u'(x) = 1$ $\qquad$ $v'(x) = 2x$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{1 \times (x^2+1) - x \times (2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

3. Étant donné que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $(x^2+1)^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x^2$. -1 et 1 sont les deux racines $1-x^2$. Ainsi, $1-x^2$ est du signe opposé du coefficient principal entre les deux racines et du signe du coefficient principal ailleurs. On déduit alors le tableau de signe de f'.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. De la question précédente, on peut déduire les variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

5. L'équation de $\mathcal{T}$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= x. \end{aligned}$$

6. On souhaite étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$.
   (a) On a :

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - x \\ &= \frac{x}{x^2+1} - x \\ &= x\left(\frac{1}{x^2+1} - 1\right) \\ &= x\left(\frac{-x^2}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{-x^3}{x^2+1}. \end{aligned}$$

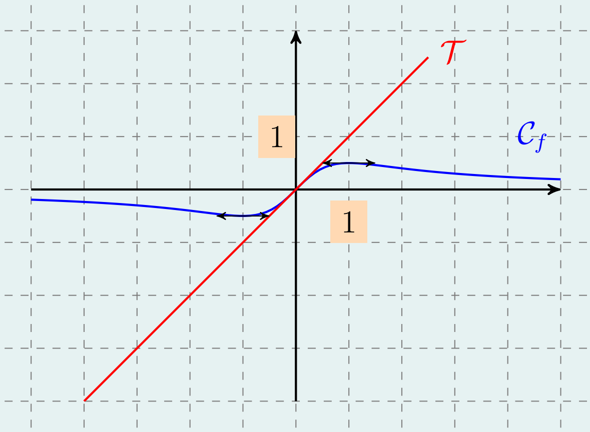
Exercice 3 : (suite)

6. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^2+1>0$. Ainsi, le signe de $d(x)$ est celui de $-x^3$. Dès lors,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^3$		$+$	0	$-$	
$d(x)$		$+$	0	$-$	

(c) « Si $d(x)>0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{T}$ ».
« Si $d(x)<0$, alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{T}$ ».
« Si $d(x)=0$, alors $\dfrac{x}{x^2+1}=x$.

(d) Dans un repère orthonormé, vous trouverez ci-après la tangente $\mathcal{T}$ et l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.



Exercice 4 : (2 points)

Le format de papier $A0$ correspond à un rectangle de largeur de $84,1$ cm et une longueur de $118,9$ cm.
Le format $A1$ est obtenu en coupant en deux parties égales le format $A0$, il a donc pour longueur la largeur de $A0$ et pour largeur la moitié de la longueur de $A0$. Sur le même principe une feuille $A1$ contient deux feuilles $A2$, une feuille $A2$ deux feuilles $A3$, etc.

1. Les dimensions d'une feuille de format $A6$, sont obtenues comme suit :

Formats	Longueur	Largeur
$A0$	$L_0=118,9$	$l_0=84,1$
$A1$	$L_1=l_0=84,1$	$l_1=\dfrac{L_0}{2}=59,45$
$A2$	$L_2=l_1=59,45$	$l_2=\dfrac{L_1}{2}=42,05$
$A3$	$L_3=l_2=42,05$	$l_3=\dfrac{L_2}{2}=29,725$
$A4$	$L_4=l_3=29,725$	$l_4=\dfrac{L_3}{2}=21,025$
$A5$	$L_5=l_4=21,025$	$l_5=\dfrac{L_4}{2}=14,8625$
$A6$	$L_6=l_5=14,8625$	$l_6=\dfrac{L_5}{2}=10,5125$

2. Il est assez aisé de voir que :
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$$