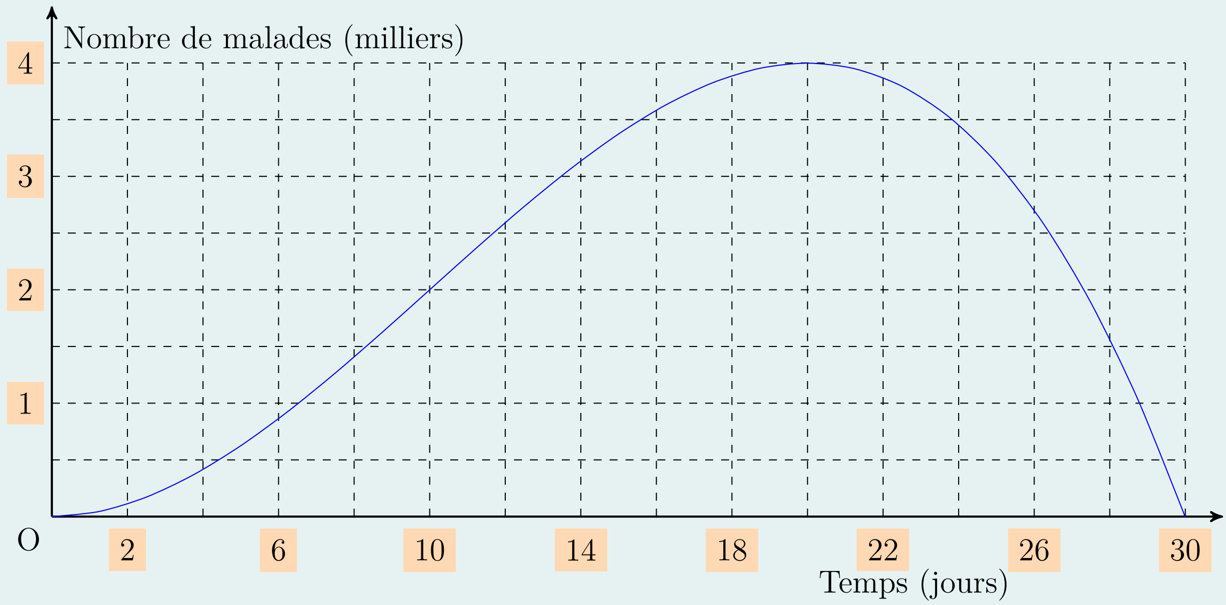
Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (4 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la vitesse de propagation d'une maladie.
Le nombre de malades en fonction du temps t, exprimé en jours, peut être modélisé par la fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$ par $f(t) = -t^3 + 30t^2$.



1. Déterminer la vitesse moyenne de propagation entre le déclenchement de la maladie (0e jour) et le 10e jour.
2. Graphiquement
   (a) Quel semble être le jour où la maladie a atteint son pic ?
   (b) Quelle est alors la vitesse de propagation de la maladie ce jour-là ?
   (c) À partir de quel jour la vitesse de propagation de la maladie diminue-t-elle ?
3. Algébriquement
   (a) Calculer $v(t) = f'(t)$.
   (b) Étudier ses variations et retrouver les résultats établis dans la question 2).

Exercice 2 : (8 points)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

1. $f : x \mapsto 5x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x}$.
2. $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^3+1}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.
5. $f : x \mapsto (1-x)^2$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.
7. $x : t \mapsto \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2} + 1$.
8. $C : q \mapsto \dfrac{q^2 - 2q + 1}{q+1}$.

Exercice 3 : (6 points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. En déduire les variations de f.
5. Déterminer l'équation de $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ en $a = 0$.
6. On souhaite étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$.
   (a) Calculer $d(x) = f(x) - (mx + p)$, où $y = mx + p$ est l'équation de $\mathcal{T}$.
   (b) Déterminer le signe de $d(x)$.
   (c) Compléter :
   « Si $d(x) > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est ……………………de $\mathcal{T}$ ».
   « Si $d(x) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est ……………………de $\mathcal{T}$ ».
   « Si $d(x) = 0$, alors …………………… ».
   (d) Dans un repère orthonormé, tracer $\mathcal{T}$ puis, à l'aide du tableau de variations de f, donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 : (2 points)

Le format de papier $A0$ correspond à un rectangle de largeur de $84,1$ cm et une longueur de 118,9 cm.
Le format $A1$ est obtenu en coupant en deux parties égales le format $A0$, il a donc pour longueur la largeur de $A0$ et pour largeur la moitié de la longueur de $A0$. Sur le même principe une feuille $A1$ contient deux feuilles A2, une feuille $A2$ deux feuilles $A3$, etc.

1. Déterminer les dimensions d'une feuille de format $A6$.
2. Déduire une écriture de 1 sous la forme d'une somme d'inverses de nombres entiers.

Bon courage!