Corrigé : Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (5 points)

On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n+2}$.

1. (a) Lorsque n est pair, $(-1)^n = 1$. Ainsi, $w_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n+2} = \dfrac{n+2}{n+2} = 1$.

   (b) Lorsque n est impair, $(-1)^n = -1$. Ainsi, $w_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n+2} = \dfrac{n-2}{n+2}$.

2. Soient (p_n) et (i_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par $p_n = w_{2n}$ et $i_n = w_{2n+1}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = w_{2n} = \dfrac{2n+2(-1)^{2n}}{2n+2} = \dfrac{2n+2}{2n+2} = 1$. Ainsi, la suite (p_n) est constante.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $i_n = w_{2n+1} = \dfrac{2n+1+2(-1)^{2n+1}}{2n+1+2} = \dfrac{2n-1}{2n+3}$ et $i_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{2(n+1)+3} = \dfrac{2n+1}{2n+5}$.
   Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
i_{n+1} - i_n &= \frac{2n+1}{2n+5} - \frac{2n-1}{2n+3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+3)(2n+5)} \\
&= \frac{4n^2+6n+2n+3-(4n^2+10n-2n-5)}{(2n+3)(2n+5)} \\
&= \frac{4n^2+8n+3-4n^2-8n+5}{(2n+3)(2n+5)} \\
&= \frac{8}{(2n+3)(2n+5)}.
\end{aligned}$$

   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{8}{(2n+3)(2n+5)} > 0$. Donc, la suite (i_n) est bel et bien croissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \begin{cases} \dfrac{n+1-2}{n+1+2} - 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 - \dfrac{n-2}{n+2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n+3} - \dfrac{n+3}{n+3} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+2}{n+2} - \dfrac{n-2}{n+2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{4}{n+3} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{n+2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Le signe de l'écart entre deux termes consécutifs w_n et w_{n+1} dépend de la parité, donc (w_n) n'est pas monotone.

Exercice 2 : (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 2.$$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme de degré 3. Ainsi,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Le discrimiant du trinôme $f'(x)$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$. Δ étant strictement positif, ce trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{6} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3}.$$

Le trinôme $f'(x)$ est du signe opposé du coefficient principal 3 entre les deux racines, et du signe du coefficient principal ailleurs. On déduit alors le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

2. (a) $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 2 = -8 + 4 + 4 = 0$, ainsi -2 est bel et bien une racine de f.

(b) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 1 \\ c + 2b = -1 \\ 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 2 = 1 \\ 1 + 2b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Par conséquent, $f(x) = (x+2)(x^2 - x + 1)$.

(c) Le discriminant du trinôme $x^2 - x + 1$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Δ étant strictement négatif, ce trinôme n'admet pas de racines et son signe est celui du coefficient principal 1. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$. On déduit alors le tableau de signes de f,

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
x^2-x+1		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 2 : (suite)

3. (a) $g : x \mapsto -2f(x)$.
La multiplication une fonction polynôme par un réel donne toujours un polynôme, et donc le domaine de définition ne change pas.
Ainsi, les deux fonctions f et g ont le même domaine de définition. Ainsi, $D_g = D_f = \mathbb{R}$.
Par ailleurs, les deux fonctions f et g ont des signes opposés, donc les sens de variations sont également opposés.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	
$g(x)$		$\searrow$	$-2f(x_1)$	$\nearrow$	$-2f(x_2)$	$\searrow$	

(b) $i : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$.
-2 est une valeur interdite car $f(x) \neq 0$, donc $D_i = R \setminus \{-2\}$.
De plus, la fonction inverse, inverse l'ordre. On déduit alors le tableau de variations de i.

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$i(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$1/f(x_1)$	$\nearrow$	$1/f(x_2)$	$\searrow$	

(c) $j : x \mapsto \sqrt{f(x)}$.
La fonction j est bien définie si et seulement si $f(x) \geqslant 0$. Autrement dit, selon la question 2.c), la fonction j est bien définie si et seulement si lorsque $x \geq -2$. Ainsi, $D_j = [-2\,;\,+\infty[$.
Par ailleurs, la fonction racine carrée est croissante, donc pour tout $x, y \in D_j$ tels que $f(x) < f(y)$ on a, $j(x) < j(y)$ et pour tout $x, y \in D_j$ tels que $f(x) > f(y)$ on a, $j(x) > j(y)$. On peut alors déduire le tableau de variations.

x	-2		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	
$j(x)$		$\nearrow$	$\sqrt{f(x_1)}$	$\searrow$	$\sqrt{f(x_2)}$	$\nearrow$	

Exercice 3 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ par : $f(x) = 4\cos^2(x) + 2(\sqrt{2}-1)\cos(x) - \sqrt{2}$. Le but de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de l'inéquation $f(x) > 0$.

1. On pose $X = cos(x)$.
   (a) On sait que pour tout $x \in]-\pi\ ;\ \pi]$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
   (b) Il est assez aisé de voir que :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 4\cos^2(x) + 2(\sqrt{2}-1)\cos(x) - \sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

   (c) Le discriminant de l'équation $4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} = 0$ est égal à :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= [2(\sqrt{2}-1)]^2 - 4\times 4\times(-\sqrt{2}) \\ &= 4(2-2\sqrt{2}+1) + 16\sqrt{2} \\ &= 4(3-2\sqrt{2}) + 16\sqrt{2} \\ &= 12 + 8\sqrt{2} \\ &= 4(3+2\sqrt{2}) \\ &= 4(1+\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

   Δ étant strictement positif, cette équation admet deux solutions :
   $X_1 = \dfrac{-2(\sqrt{2}-1) - 2(1+\sqrt{2})}{8} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-2(\sqrt{2}-1) + 2(1+\sqrt{2})}{8} = \dfrac{1}{2}$.

   (d) Sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ admet deux solutions : $-\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.
   Sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ admet deux solutions : $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.
   Par conséquent, $S = \left\{-\dfrac{3\pi}{4}\ ;\ -\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

2. On pose $X = \cos(x)$.
   (a) Soit $X \in [-1\ ;\ 1]$, on a :

$$4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0.$$

   On peut dresser alors un tableau de signes :

X	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
$X - \frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$X + \frac{\sqrt{2}}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi, $S = \left[-1\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

   (b) Sur $]-\pi\ ;\ \pi]$, on a :
   $f(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\pi\ ;\ -\dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$.

Exercice 3 : (suite)

Ci-après l'ensemble de solutions donné graphiquement.