Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (5 points)

On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n+2}$.

1. (a) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n pairs, puis simplifier l'expression.
   (b) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n impairs.
2. Soient (p_n) et (i_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par $p_n = w_{2n}$ et $i_n = w_{2n+1}$.
   (a) Donner l'expression de p_n en fonction de n. Que remarque-t-on ?
   (b) Exprimer i_n et i_{n+1} en fonction de n. En déduire que la suite (i_n) est croissante.
3. Que peut-on dire sur la monotonie de (w_n) ?

Exercice 2 : (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 2.$$

1. Déterminer les variations de f.
2. (a) Vérifier que -2 est une racine de f.
   (b) On a donc $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont trois réels.
   Déterminer a, b et c.
   (c) En déduire le tableau de signes de $f(x)$.
3. Déduire des questions précédentes les ensembles de définition et les variations des fonctions suivantes :

   (a) $g : x \mapsto -2f(x)$. (b) $i : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$. (c) $j : x \mapsto \sqrt{f(x)}$.

Exercice 3 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\pi;\pi]$ par : $f(x) = 4cos^2(x) + 2(\sqrt{2}-1)cos(x) - \sqrt{2}$. Le but de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et de l'inéquation $f(x) > 0$.

1. On pose $X = cos(x)$.
   (a) Montrer que $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
   (b) Montrer que résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à résoudre l'équation

   $$4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} = 0.$$

   (c) Résoudre sur $[-1\ ;\ 1]$ l'équation : $4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} = 0$. On notera X_1 et X_2 les solutions obtenues.
   (d) En déduire les solutions sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ de l'équation $f(x) = 0$.
2. On pose $X = cos(x)$.
   (a) Résoudre sur $[-1\ ;\ 1]$ l'inéquation $4X^2 + 2(\sqrt{2}-1)X - \sqrt{2} > 0$.
   (b) En déduire les solutions sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ de l'inéquation $f(x) > 0$.

Bon courage !