1re Spé
maths-mde.fr

# Devoir Surveillé $n^\circ$ 10

**Corrigé**

Lycée
Evariste Galois

## Exercice 1 : (2 points)

**1** On sait que pour tout réel $x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$, ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \cos^2\left(\frac{5\pi-2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\\
&= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\\
&= \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\\
&= 1, \quad \text{car} \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \cos^2(x)+\sin^2(x)=1.
\end{aligned}$$

**2** On sait que pour tout réel $x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$, ainsi,

$$\begin{aligned}
1+\sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{26}\right) &= 1+\sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin^2\left(\frac{13\pi-2\pi}{26}\right)\\
&= 1+\sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{13}\right)\\
&= +\sin^2\left(\frac{\pi}{13}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{13}\right)\\
&= 1+1, \quad \text{car} \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \cos^2(x)+\sin^2(x)=1\\
&= 2.
\end{aligned}$$

## Exercice 2 : (4 points)

On considère l'équation suivante, d'inconnue réelle $x$ : $(E)\ :\ -\cos^2(x)-2\sin(x)+2=0$.

**1** On sait que pour tout réel $x$, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(E)\ :\ -\cos^2(x)-2\sin(x)+2=0 &\Leftrightarrow -(1-\sin^2(x))-2\sin(x)+2=0\\
&\Leftrightarrow -1+\sin^2(x)-2\sin(x)+2=0\\
&\Leftrightarrow \sin^2(x)-2\sin(x)+1=0\ :\ (G).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

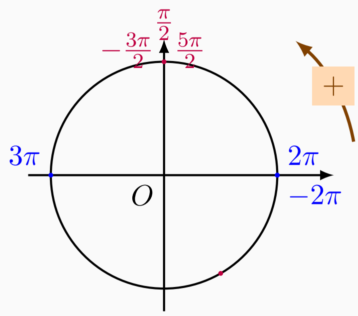
**2** En utilisant la seconde identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned}
X^2-2X+1=0 &\Leftrightarrow (X-1)^2=0\\
&\Leftrightarrow X-1=0\\
&\Leftrightarrow X=1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S=\{1\}$.

**3** Pour en déduire les solutions réelles de l'équation $(E)$, sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 3\pi[$, il suffit de résoudre l'équation $\sin(x)=1$.

$-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ sont les solutions de l'équation $(E)$ sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 3\pi[$.



## Exercice 3 : (4 points)

Soit trois fonctions $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$ ; $g(x) = 2\sin(x)$ et $h(x) = \sin^2(x)$.

**1** Le domaine de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, car $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.
De plus, la fonction sin est impaire. Ainsi, pour tout réel $x$, on a :

$$\begin{cases} f(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x) \\ g(-x) = 2\sin(-x) = -2\sin(x) = -g(x). \end{cases}$$

Par conséquent, $f$ et $g$ sont impaires. Cela signifie que leurs courbes représentatives respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère $O(0\ ;\ 0)$.

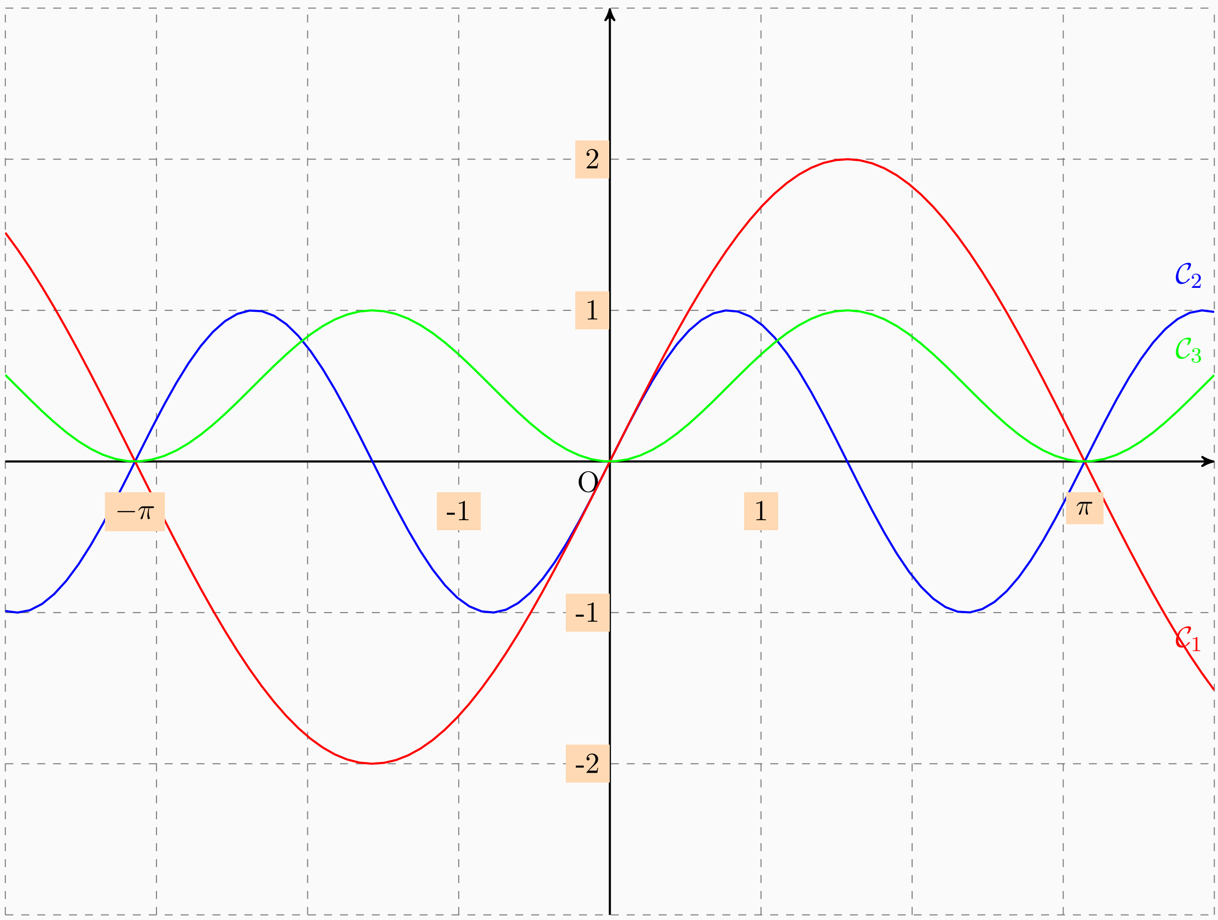
**2** On sait que pour réel $x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$. Ainsi,

$$\begin{cases} f(x+\pi) = \sin\left(2(x+\pi)\right) = \sin(2x + pi) = \sin(2x) = f(x) \\ h(x+\pi) = \sin^{(} x+\pi) = (\sin(x+\pi))^2 = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = h(x). \end{cases}$$

Par conséquent, $f$ et $h$ sont $\pi$-périodiques. Cela signifie que les courbes représentatives reproduisent de façon répétitive le tracé obtenu sur un intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

**3** Montrer que $h$ est paire. Interpréter graphiquement.

**4** $f$, $g$ et $h$ sont représentées dans le repère ci-dessous. Justifier.




— La courbe $\mathcal{C}_2$ est symétrique par rapport à l'origine $O$, elle représente ainsi une fonction impaire. De plus, le tracé sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$ est superposable avec la portion de la courbe tracée sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$. Il s'agit donc de la fonction $f$, impaire et $\pi$-périodique.

— La courbe $\mathcal{C}_3$ est située au-dessus de l'axe des abscisses, elle représente ainsi une fonction positive. Il s'agit donc de la fonction $h$.

— Enfin, la courbe $\mathcal{C}_1$ représente la fonction $g$.

## Exercice 4 : (5 points)

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement. À la fin 2019, le réseau compte exactement 600 personnes abonnées. L'administrateur de la plateforme prévoit chaque année que 20 % des anciens abonnés ne se réabonnent pas, et que 2 000 nouvelles personnes s'abonnent. On note $u_n$ le nombre d'abonnés sur la plateforme en 2019 + n.

**1** En 2020, le réseau gagne 2 000 nouveaux abonnés mais perd 20% des abonnés par rapport à 2019, soit 120. En effet, $600 \times 0{,}2 = 120$.
Ainsi, le nombre d'abonnés en 2020, s'élève à : $2\,000 + 600 - 120 = 2\,480$.

**2** $u_0 = 600$ et $u_1 = 2\,480$.

**3** En $2019 + (n + 1)$, le réseau gagne 2 000 nouveaux abonnés mais perd 20% des abonnés par rapport à $2019 + n$. Ainsi,

$$u_{n+1} = (1 - 20\%)u_n + 2000 = (1 - 0{,}2)u_n + 2000 = 0{,}8u_n + 2000.$$

**4** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 10000$.

**a** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10000 \\ &= 0{,}8u_n + 2000 - 10000 \\ &= 0{,}8u_n - 8000 \\ &= 0{,}8\left(u_n - 10000\right) \\ &= 0{,}8v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}8$. Le quotient des termes consécutifs est constant, donc la suite $(v_n)$ est géométrique.

**b** $v_0 = u_0 - 10000 = 600 - 10000 = -9400$.

**c** $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $-9400$, ainsi :

$$v_n = v_0 \times 0{,}8^n = -9400 \times 0{,}8^n.$$

**d** On déduit alors que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = v_n + 10000 = -9400 \times 0{,}8^n + 10000.$$

**e** On peut obtenir le résultat, en utilisant la calculatrice. L'administrateur prévoit environ 9 990 abonnés en 2050.

## Exercice 5 : (5 points)

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 12x + 13 \quad \text{et} \quad g(x) = -6x^3 + 2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ et $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de $g$. On souhaite étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$. Pour cela, on considère la fonction $\delta$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\delta(x) = f(x) - g(x)$.

**1** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \delta(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -4x^3 + 3x^2 + 12x + 13 - \left(-6x^3 + 2\right) \\ &= -4x^3 + 3x^2 + 12x + 13 + 6x^3 - 2 \\ &= 2x^3 + 3x^2 + 12x + 11. \end{aligned}$$

**2** $\delta$ est une fonction polynôme de degré 3, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\delta'(x) = 6x^2 + 6x + 12.$$

**3** Le discriminant du trinôme $\delta'(x)$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 6 \times 12 = -252$..
Le discriminant étant strictement négatif, ce trinôme n'admet de racines. Son signe est celui du coefficient principal. Ainsi,

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\delta'(x)$ | | $\operatorname{sgn}(a) = +$ | |

**4** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\delta'(x) > 0$ donc la fonction $\delta$ est strictement croissante. Autrement dit,

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\delta(x)$ | | $\nearrow$ | |

En déduire le sens de variation de $\delta$ sur $\mathbb{R}$.

**5** $\delta(-1) = 2 \times (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 12 \times (-1) + 11 = -2 + 3 - 12 + 11 = 0$. On déduit alors que :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Autrement dit, pour tout $x \in ]-\infty\ ;\ -1]$, $\delta(x) \leqslant 0$ et pour tout $x \in [-1\ ;\ +\infty[$, $\delta(x) \geqslant 0$.

**6** De la question précédente, on déduit que pour tout $x \in ]-\infty\ ;\ -1]$ :

$$\delta(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x).$$

Autrement dit, $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de $\mathcal{C}_g$, pour tout $x \in ]-\infty\ ;\ -1]$.
Idem, pour tout $x \in [-1\ ;\ +\infty[$,

$$\delta(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant g(x).$$

Autrement dit, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_g$, pour tout $x \in [-1\ ;\ +\infty[$.