Devoir Surveillé n° 11

Corrigé

Exercice 1 : (5 points)

Les cinq questions indépendantes.

1 On sait que : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ et $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A}) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}5 \\ &= 0.2. \end{aligned}$$

2 D'après la formule des probabilités totales, on a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.
Or, $P(B) = 0{,}6$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2$. Donc, $P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

3 On sait que :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{3}{7} + \frac{3}{20} - \frac{4}{7} \\ &= \frac{3 \times 7}{20 \times 7} - \frac{20}{7 \times 20} \\ &= \frac{1}{140}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $P(A) \times P(B) = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{3}{20} = \dfrac{9}{140}$. Étant donné que : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, les deux événements ne sont pas indépendants.

4 Par définition, on a : $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)}$.
De plus, selon la formule des probabilités totales, on a : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. Ainsi,
$P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \dfrac{0{,}15}{0{,}45} = \dfrac{2}{3}$.

5 Par définition, on a : $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{B})}$.
De plus, en utilisant la formule des probabilités totales, on obtient : $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$.
Dès lors,

$$\begin{aligned} P_{\overline{B}}(\overline{A}) &= \frac{P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\ &= 1 - \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\ &= 1 - P_{\overline{B}}(A), \quad \text{par définition} \\ &= 1 - P(A), \quad \text{A et B sont indépendants} \\ &= P(\overline{A}). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 2 : (3 points)

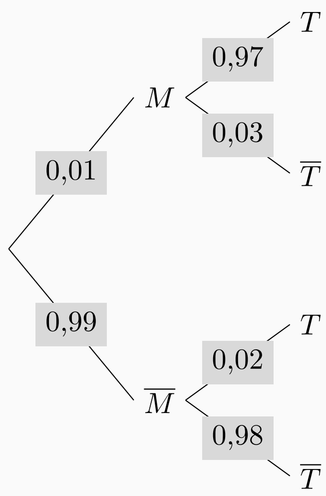
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au dix millième.
On étudie un test de dépistage pour une certaine maladie dans une population donnée. On sait que 1% de la population est atteint de la maladie. Des études ont montré que si une personne est malade, alors le test se révèle positif dans 97% des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.

Pour une personne à qui ont fait passer le test de dépistage on associe les événements :

— M : la personne est malade,

— T : le test est positif.

L'arbre de probabilité résumant cette situation est le suivant :



1 Par définition, on a :

$$\begin{aligned} P(\overline{M} \cap T) &= P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0{,}99 \times 0{,}02 \\ P(\overline{M} \cap T) &= 0{,}0198. \end{aligned}$$

2 D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0{,}01 \times 0{,}97 + 0{,}0198 \\ &= 0{,}0097 + 0{,}0198 \\ P(T) &= 0{,}0295. \end{aligned}$$

3 D'après la définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}0097}{0{,}0295} \\ P_T(M) &\approx 0{,}3288. \end{aligned}$$

Exercice 3 : (5 points)

Cette année, 300 000 étudiants sont en prépa ou en BTS. Parmi eux, on compte 180 000 garçons dont 25 % sont en prépa. Par ailleurs 80 % des filles sont en BTS. On prend au hasard un étudiant et l'on nomme : G « l'étudiant est un garçon », F « l'étudiant est une fille », A « l'étudiant est en prépa » et B « l'étudiant est en BTS. »

1 $P(G) = \dfrac{180\ 000}{300\ 000} = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5}$.

2 Soit G' l'événement « l'étudiant est un garçon en prépa. » Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} P(G') & = & P(G \cap A) \\ & = & P(G) \times P_G(A) \\ & = & \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} \\ & = & \dfrac{3}{20}. \end{array}$$

3 (a) Par définition, on a : $P_G(A) = \dfrac{P(A \cap G)}{P(G)}$. Ainsi, $P_G(A) = \dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{4}$;

(b) Par définition, on a : $P_B(F) = \dfrac{P(B \cap F)}{P(B)}$.
Et, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rcl} P(B) & = & P(B \cap F) + P(B \cap G) \\ & = & P(F)P_F(B) + P(G)P_G(B) \\ & = & \dfrac{2}{5} \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{4} \\ & = & \dfrac{8}{25} + \dfrac{9}{20} \\ & = & \dfrac{32+45}{100}. \end{array}$$

Ainsi, $P_B(F) = \dfrac{\frac{8}{25}}{\frac{77}{100}} = \dfrac{32}{77}$.

(c) Par définition, on a : $P_A(G) = \dfrac{P(A \cap G)}{P(A)}$.
Ainsi, Et, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rcl} P(A) & = & P(A \cap F) + P(A \cap G) \\ & = & P(F)P_F(A) + P(G)P_G(A) \\ & = & \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} \\ & = & \dfrac{23}{100}. \end{array}$$

Ainsi, $P_A(G) = \dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{23}{100}} = \dfrac{15}{23}$.

Exercice 4 : (5 points)

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une enquête a été menée auprès de lycéens pour estimer la proportion de ceux qui ont déjà consommé du cannabis. Pour encourager les réponses sincères, on met en place le protocole suivant : chaque adolescent lance d'abord un dé équilibré à 6 faces et l'enquêteur qui va l'interroger ne connaît pas le résultat du lancer.
À la question « Avez-vous déjà consommé du cannabis ? », l'adolescent doit répondre :

— « non » si le résultat du lancer est 5, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
— « oui » si le résultat du lancer est 6, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
— « oui » ou « non » dans les autres cas, mais de façon sincère.

On note :

— N : l'évènement l'adolescent a répondu « non » ;
— O : l'évènement l'adolescent a répondu « oui » ;
— C : l'évènement l'adolescent a déjà consommé effectivement du cannabis ;

— $\overline{C}$: l'évènement l'adolescent n'a jamais consommé du cannabis.

Sur les lycéens qui ont participé à cette enquête on constate que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » est de $\frac{3}{5}$, soit $P(O) = \frac{3}{5}$.

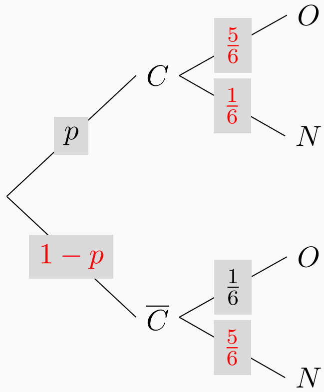
On veut déterminer la probabilité, notée p, qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis.

On a donc $P(C) = p$.

1 On considère un lycéen n'ayant jamais consommé de cannabis. Alors, il répond « Oui » au questionnaire uniquement s'il obtient un « 6 » au lancer de dé.

Donc la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\frac{1}{6}$.

2 On a :



3 (a) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(O) = P(C) \times P_C(O) + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(O).$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5} = p \times \frac{5}{6} + (1-p) \times \frac{1}{6} \\ \iff & \frac{3}{5} = \frac{5}{6}p + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}p \\ \iff & \frac{3}{5} = \frac{4}{6}p + \frac{1}{6} \\ \iff & \frac{3}{5} = \frac{2}{3}p + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \frac{3}{5} = \frac{2}{3}p + \frac{1}{6} \iff & \frac{2}{3}p = \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \\ \iff & \frac{2}{3}p = \frac{13}{30} \\ \iff & p = \frac{13}{30} \times \frac{3}{2} \\ \iff & p = \frac{13}{20}. \end{aligned}$$

4 Par définition, on a : $$\begin{aligned} P_N(\overline{C}) &= \frac{P(\overline{C} \cap N)}{P(N)} \\ &= \frac{\frac{7}{20} \times \frac{5}{6}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{35}{48}. \end{aligned}$$

Ainsi, sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis est égale à $\frac{35}{48}$.

Exercice 5 : (2 points)

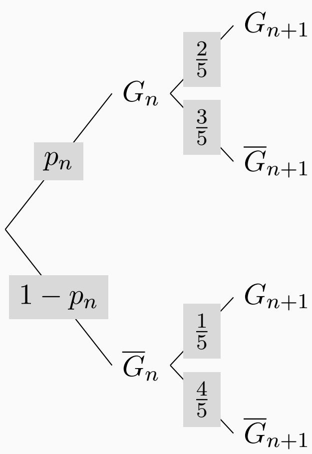
Un site internet propose un jeu en ligne dont probabilités sont les suivantes :

— si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante vaut $\frac{2}{5}$.

— si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante vaut $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'événement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'événement G_n. L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1 Ci-dessous l'arbre pondéré complété.

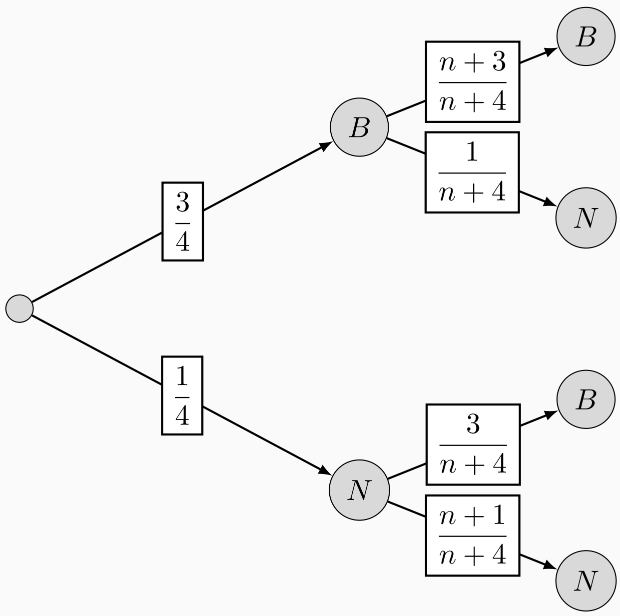


2 En utilisant la formule des probabiltés totales, on obtient :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(G_{n+1}) \\
&= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G}_n \cap G_{n+1}) \\
&= P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G}_n)P_{\overline{G}_n}(G_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{2}{5} + (1-p_n) \times \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Exercice bonus : (1 point)

On définit les deux événements suivants. B : « la boule tirée est blanche » et N : « la boule tirée est noire ». L'arbre pondéré suivant modélise la situation :



On note A l'événement : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(B \cap B) + P(N \cap N) = \frac{3}{4} \times \frac{n+3}{n+4} + \frac{1}{4} \times \frac{n+1}{n+4} = \frac{4n+10}{4n+16}.$$

En résolvant l'équation $P(A) = \dfrac{3}{4}$, on obtient $n = 2$.