Devoir Surveillé n° 11

Exercice 1 : (5 points)

Les cinq questions indépendantes.

1 Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire tels que : $P(\overline{A}) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cup B) = 0{,}5$. Calculer $P(A \cap B)$.

2 Soit A et B deux événements tels que $P(B) = 0{,}6$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P(A \cap B)$.

3 A et B sont deux événements tels que $p(A) = \dfrac{3}{7}$; $P(B) = \dfrac{3}{20}$ et $P(A \cup B) = \dfrac{4}{7}$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

4 Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}45$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$. Calculer $P_A(\overline{B})$.

5 A et B sont deux événements indépendants. Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 2 : (3 points)

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au dix millième.
On étudie un test de dépistage pour une certaine maladie dans une population donnée. On sait que 1% de la population est atteint de la maladie. Des études ont montré que si une personne est malade, alors le test se révèle positif dans 97% des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 98% des cas.
Pour une personne à qui ont fait passer le test de dépistage on associe les événements :

— M : la personne est malade,
— T : le test est positif.

1 Justifier que $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}0198$.

2 Montrer que $P(T) = 0{,}0295$.

3 Calculer $P_T(M)$.

Exercice 3 : (5 points)

Cette année, 300 000 étudiants sont en prépa ou en BTS. Parmi eux, on compte 180 000 garçons dont 25 % sont en prépa. Par ailleurs 80 % des filles sont en BTS. On prend au hasard un étudiant et l'on nomme :

— G : « l'étudiant est un garçon » ;
— F : « l'étudiant est une fille » ;
— A : « l'étudiant est en prépa » ;
— B : « l'étudiant est en BTS ».

1 Calculer $P(G)$.

2 Calculer la probabilité de l'événement : « l'étudiant est un garçon en prépa. »

3 Calculer les probabilités suivantes :

a $P_G(A)$; | **b** $P_B(F)$; | **c** $P_A(G)$.

Exercice 4 : (5 points)

Une enquête a été menée auprès de lycéens pour estimer la proportion de ceux qui ont déjà consommé du cannabis. Pour encourager les réponses sincères, on met en place le protocole suivant : chaque adolescent lance d'abord un dé équilibré à 6 faces et l'enquêteur qui va l'interroger ne connaît pas le résultat du lancer.
À la question « Avez-vous déjà consommé du cannabis ? », l'adolescent doit répondre :

— « non » si le résultat du lancer est 5, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;

— « oui » si le résultat du lancer est 6, qu'il ait ou non déjà consommé du cannabis ;
— « oui » ou « non » dans les autres cas, mais de façon sincère.

On note :

— N : l'évènement l'adolescent a répondu « non » ;
— O : l'évènement l'adolescent a répondu « oui » ;
— C : l'évènement l'adolescent a déjà consommé effectivement du cannabis ;
— $\overline{C}$: l'évènement l'adolescent n'a jamais consommé du cannabis.

Sur les lycéens qui ont participé à cette enquête on constate que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » est de $\frac{3}{5}$, soit $P(O) = \frac{3}{5}$.

On veut déterminer la probabilité, notée p, qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis.

On a donc $P(C) = p$. *Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1 Justifier que la probabilité qu'un adolescent ait répondu « oui » sachant qu'il n'a jamais consommé de cannabis est $\frac{1}{6}$.

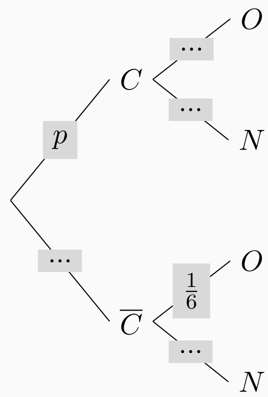
2 On a représenté ci-dessous l'arbre de probabilités représentant la situation. Recopier et compléter cet arbre.

3 (a) Démontrer que la probabilité p qu'un adolescent ait déjà consommé du cannabis vérifie l'équation :

$$\frac{2}{3}p + \frac{1}{6} = \frac{3}{5}.$$

(b) En déduire la valeur de p.

4 Sachant qu'un adolescent a répondu « non » pendant l'enquête, quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais consommé de cannabis ?

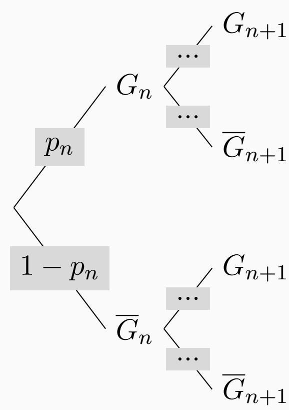


Exercice 5 : (2 points)

Un site internet propose un jeu en ligne dont probabilités sont les suivantes :

— si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante vaut $\frac{2}{5}$.
— si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante vaut $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'événement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'événement G_n. L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.



1 Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2 Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

Exercice bonus : (1 point)

Une urne contient initialement trois boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne.

— Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires.
— Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute boules n noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne. On note A l'événement : « les deux boules tirées sont de la même couleur ». Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $P(A) = \frac{3}{4}$?