1re Spé | **Devoir Surveillé $n°$ 7** | Lycée
maths-mde.fr | **Corrigé** - 30 minutes | Evariste Galois

Question 1 : (1 point)

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3n-1}{2n+2}$. Ainsi,
$u_4 = \dfrac{3\times 4-1}{2\times 4+2} = \dfrac{12-1}{8+2} = \dfrac{11}{10}$;
$u_7 = \dfrac{3\times 7-1}{2\times 7+2} = \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{4}$.

Question 2 : (1 point)

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n^2 + n - \dfrac{1}{3} \end{cases}$. Ainsi,
$u_1 = 5u_0^2 + 0 - \dfrac{1}{3} = 5\times 3^2 - \dfrac{1}{2} = 45 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{134}{3}$.
$u_2 = 5u_1^2 + 1 - \dfrac{1}{3} = 5\times\left(\dfrac{134}{3}\right)^2 + 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{17956}{9}\times 5 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{39607}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{89786}{9}$.

Question 3 : (1 point)

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{n^2+1}\ u_n \end{cases}$. On déduit alors que :

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1+1} \\ &= \sqrt{(n-1)^2+1}\ u_{n-1} \\ &= \sqrt{n^2-2n+1+1}\ u_{n-1} \\ &= \sqrt{n^2-2n+2}\ u_{n-1}. \end{aligned}$$

Question 4 : (1 point)

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$. Les quatre premiers termes de cette suite sont :
$u_1 = 1^2 = 1$;
$u_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$;
$u_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$;
$u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$.

Question 5 : (1 point)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} &= \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= \sum_{k=0}^{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k. \end{aligned}$$

Question 6 : (1 point)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \sqrt{3+2n}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{3+2(n+1)} - \sqrt{3+2n} \\
&= \sqrt{2n+5} - \sqrt{3+2n} \\
&= \sqrt{2n+5} - \sqrt{3+2n} \times \frac{\sqrt{2n+5}+\sqrt{3+2n}}{\sqrt{2n+5}+\sqrt{3+2n}} \\
&= \frac{\sqrt{2n+5}^2 - \sqrt{3+2n}^2}{\sqrt{2n+5}+\sqrt{3+2n}} \\
&= \frac{2n+5-3-2n}{\sqrt{2n+5}+\sqrt{3+2n}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2n+5}+\sqrt{3+2n}}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2n+5} > 0$ et $\sqrt{3+2n} > 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

Question 7 : (1 point)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \dfrac{5n}{3^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{5n}{3^{n+1}} \\
&= \frac{5n+5}{3^{n+2}} - \frac{3\times 5n}{3\times 3^{n+1}} \\
&= \frac{5n+5-15n}{3^{n+2}} \\
&= \frac{5-10n}{3^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+2} > 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $5 - 10n$.
Par ailleurs, le signe de la fonction affine $x \longrightarrow 5 - 10x$, est donné par le tableau suivant.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$5-10x$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

Question 8 : (1 point)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = -\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$.

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{2}{7}\right)^n > 0$ et donc $u_n < 0$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{-\left(\frac{2}{7}\right)^{n}} \\
&= \frac{2}{7}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. On déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

Question 9 : (1 point)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n. \end{cases}$

Voici, les cinq premiers termes de cette suite :
$u_0 = 2$; $u_1 = -5 \times 2 = -10$; $u_2 = -5 \times (-10) = 50$; $u_3 = -5 \times 50 = -250$ et $u_4 = -5 \times (-250) = 1250$.
Par définition, on constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous les termes consécutifs u_n et u_{n+1} sont de signes opposés. Par conséquent, la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Question 10 : (1 point)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5n^2 - 6n + 1. \end{cases}$

Par définition, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5n^2 - 6n + 1$.
Par ailleurs, le discriminant du trinôme $5x^2 - 6x + 1$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 5 \times 1 = 16$.
Δ étant strictement positif, ce trinôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{6-\sqrt{16}}{10} = \dfrac{1}{5}$ et $x_2 = \dfrac{6+\sqrt{16}}{10} = 1$.
Ainsi, ce trinôme est du signe opposé du coefficient principal entre les deux racines, et du signe du coefficient principal ailleurs.
La suite (u_n) étant définie sur $\mathbb{N}$, seul le signe du trinôme sur $\mathbb{R}^+$, nous intéresse. Autrement dit,

x	0		$\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, c'est-à-dire la suite (u_n) est croissante à partir du rang $n = 1$.