1re Spé
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 8

Corrigés

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (3 points)

1 On considère la fonction f définie sur D_f par : $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$.

(a) 2 est la valeur interdite, car $x - 2 \neq 0$. Ainsi,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[.$$

(b) f est le quotient de deux fonctions dérivables sur D_f, elle est donc dérivable sur D_f. Posons,

$u(x) = 3x$
$u'(x) = 3$

$v(x) = x - 2$
$v'(x) = 1.$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{3 \times (x-2) - 3x \times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{-6}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

(c) On sait que, pour tout $x \in D_f$, $(x-2)^2 > 0$. Ainsi, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) < 0$. Dès lors,

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

2 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbf{N}$, par : $u_n = \dfrac{3n}{n-2}$.
On remarque que : $u_n = f(n)$.
Or, d'après la question précédente, la fonction f est décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$. Donc, la suite (u_n) est strictement décroissante pour tout $n \geqslant 3$.

Exercice 2 : (2 points)

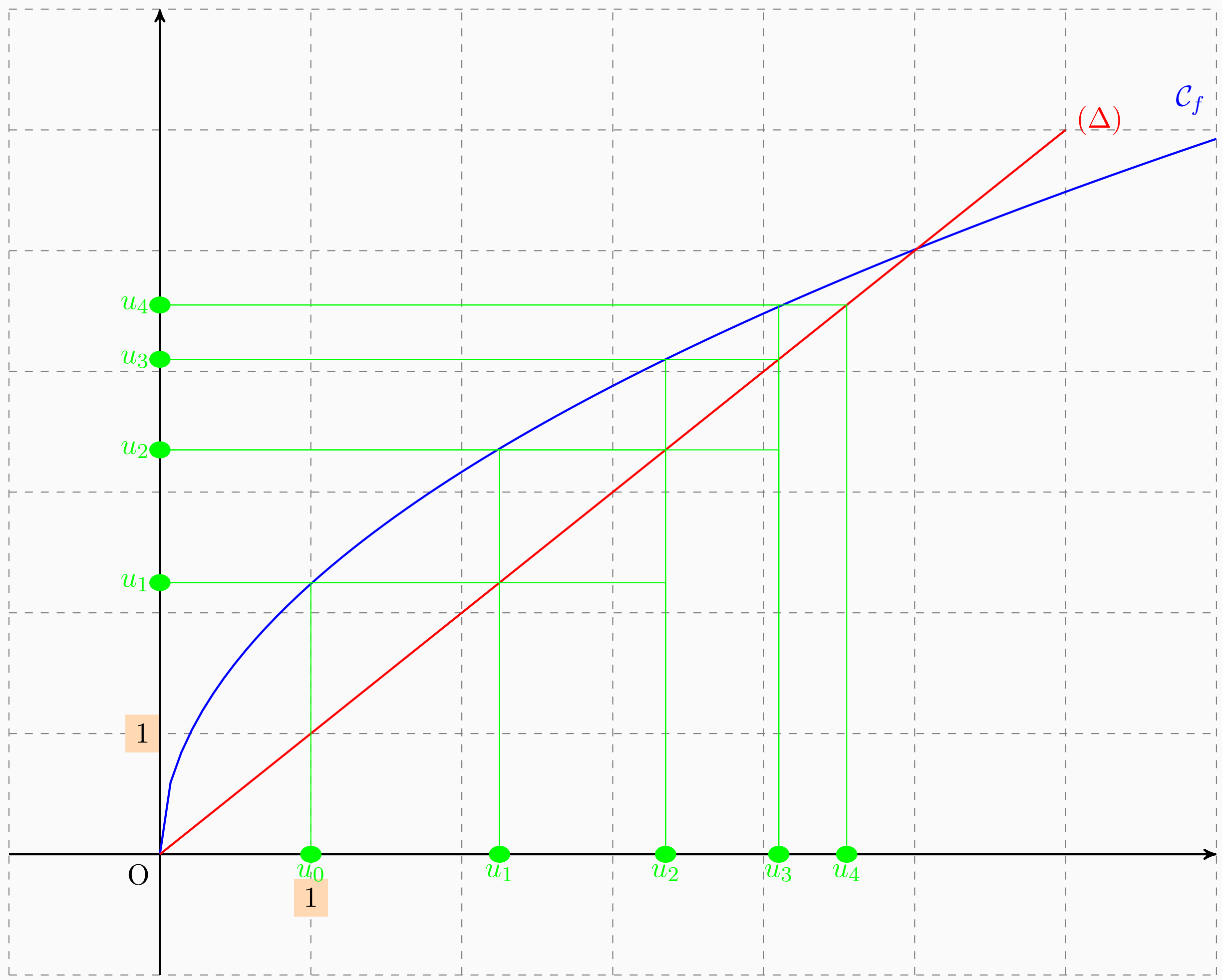
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous. On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

1 Voir la figure ci-après.

2 Conjectures : La suite (u_n) semble croissante, car $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$.
Les termes u_1, u_2 et u_3 se rapprochent rapidement et efficacement de 5. On peut dire alors que la suite (u_n) tend vers 5. On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 5.$$

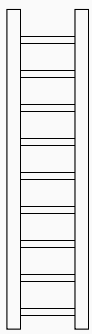


Exercice 3 : (3,5 points)

On s'intéresse à une échelle dont le premier barreau se trouve à une hauteur de 10 cm du sol. Il y a ensuite 30 cm entre chaque barreau.

1 (a) La hauteur du deuxième barreau est située à 40 cm. En effet, $30 + 10 = 40$.

(b) La hauteur du troisième barreau est située à 70 cm. En effet, $30 + 30 + 10 = 70$.



2 On note u_n la hauteur par rapport au sol du n-ième barreau de l'échelle.

(a) $u_1 = 10$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 30$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10 + 30(n-1) = 30n - 20$.

Exercice 4 : (6 points)

1 La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. On donne : $u_4 = -2$ et $u_8 = \dfrac{1}{2}$.

(a) **Méthode 1 :** On sait que : $u_n = u_0 + nr$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dès lors,

$$\begin{cases} u_8 = \dfrac{1}{2} & L_1 \\ u_4 = -2 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 8r = \dfrac{1}{2} \\ u_0 + 4r = -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4r = \dfrac{5}{2} & L_1 - L_2 \\ u_0 + 4r = -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{5}{8} \\ u_0 = -2 - 4 \times \dfrac{5}{8} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{5}{8} \\ u_0 = -\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, la suite arithmétique (u_n) est de raison $\dfrac{5}{6}$ et de premier terme $-\dfrac{9}{2}$.

Méthode 2 : (u_n) est une suite arithmétique de raison r, donc $\forall n \geqslant p : u_n = u_p + (n-p)r$. Dès lors,

$u_8 = u_4 + (8-4)r \Leftrightarrow r = \dfrac{u_8 - u_4}{4} \Leftrightarrow r = \dfrac{\frac{1}{2} + 2}{4} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8}$.

Par ailleurs, $u_4 = u_0 + 4r$. Donc, $u_0 = -2 - 4 \times \dfrac{5}{8} = -\dfrac{9}{2}$.

Ainsi, la suite arithmétique (u_n) est de raison $\dfrac{5}{6}$ et de premier terme $-\dfrac{9}{2}$.

(b) $u_{15} = u_0 + 15r = -\dfrac{9}{2} + 15 \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{39}{8}$.

(c) **Méthode 1 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (u_0 + ir) \\ &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) \\ &= \sum_{i=0}^{n} u_0 + r \sum_{i=0}^{n} i \\ &= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\left(\frac{2u_0 + nr}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{-9 + \frac{5}{8}n}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(-\frac{9}{2} + \frac{5}{16}n\right). \end{aligned}$$

Méthode 2 : On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{array}{rcl}
S_n & = & \text{Nombre de termes} \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2} \\
 & = & (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2} \\
 & = & (n+1)\left(\dfrac{2u_0+nr}{2}\right) \\
 & = & (n+1)\left(\dfrac{-9+\frac{5}{8}n}{2}\right) \\
 & = & (n+1)\left(-\dfrac{9}{2}+\dfrac{5}{16}n\right).
\end{array}
$$

(d) En utilisant la question précédente, on obtient : $S_{100} = 101 \times \left(-\dfrac{9}{2} + \dfrac{5}{16} \times 100\right) = \dfrac{10\ 807}{4}$.

2 La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme v_0. On donne : $v_2 = 9$ et $v_6 = 144$.

(a) (v_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$. Donc, $\dfrac{v_n}{v_p} = \dfrac{v_0 q^n}{v_0 q^p} = q^{n-p}$.

Dès lors, $q^4 = \dfrac{v_6}{v_2} = \dfrac{144}{9} = 16$.

Par conséquent, $q^2 = \sqrt{16} = 4$ et $q = \sqrt{4} = 2$, car $q > 0$. Calculons à présent v_0 :

On sait que : $v_2 = v_0 q^2$. Ainsi, $v_0 = \dfrac{v_2}{q^2} = \dfrac{9}{4}$.

(b) **Méthode 1 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{array}{rcl}
S'_n & = & v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\
 & = & v_0 + v_0 q + \cdots + v_0 q^n \\
 & = & v_0(1 + q + \cdots + q^n) \\
 & = & v_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} \\
 & = & \dfrac{9}{4}\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} \\
 & = & \dfrac{9}{4}\left(2^{n+1}-1\right).
\end{array}
$$

Méthode 2 : On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{array}{rcl}
S'_n & = & \text{1er terme} \times \dfrac{q^{\text{Nombre de termes}} - 1}{q-1} \\
 & = & v_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} \\
 & = & \dfrac{9}{4}\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} \\
 & = & \dfrac{9}{4}\left(2^{n+1}-1\right).
\end{array}
$$

(c) D'après la question précédente, $S'_{15} = \dfrac{9}{4}\left(2^{16}-1\right) = 147453{,}75$.

Exercice 5 : (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, $f(x) = x^3 + x^2 + x$.

1 f est une fonction polynôme de degré 3, elle est donc bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f'(x) =$

$3x^2 + 2x + 1$.
Le discriminant du trinôme $f'(x)$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8$
Δ étant strictement négatif, ce trinôme n'admet pas de racine, et son signe est celui du coefficient principal. Dès lors,

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

$\boxed{\textbf{2}}$ La droite (d) d'équation $y = x$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f si,

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Or, $f(0) = 0$. Donc, la droite d'équation, $y = x$ est bel et bien une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

$\boxed{\textbf{3}}$ Calculons la différence $f(x) - y$.

$$\begin{aligned} f(x) - y &= f(x) - x \\ &= x^3 + x^2 + x - x \\ &= x^2(x + 1). \end{aligned}$$

On peut alors dresser le tableau de signe de de $f(x) - y$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$	
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	

Par conséquent, la droite (d) est située au dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$ et $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de (d) sur $[-1\ ;\ +\infty[$.

$\boxed{\textbf{4}}$ Résolvons l'équation : $f'(x) = \dfrac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 1 = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $(*)$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{1}{3} = 0$.

Δ étant nul, cette équation admet une solution double : $x_1 = x_2 = \dfrac{-2}{2 \times 3} = -\dfrac{1}{3}$.

Par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une, et une seule, tangente de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$.

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est donné par,

$$\begin{aligned} y &= f'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{7}{27} \\ &= \frac{2}{3}x+\frac{2}{9}-\frac{7}{27} \\ &= \frac{2}{3}x-\frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Avec, $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 3\times\dfrac{1}{9}-2\times\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{2}{3}$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{7}{27}$.

5 En utilisant l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{(3x+1)^3}{27} &= \frac{27x^3+27x^2+9x+1}{27} \\ &= x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}. \end{aligned}$$

6 Calculons la différence $f(x)-y$.

$$\begin{aligned} f(x)-y &= f(x)-\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{27}\right) \\ &= x^3+x^2+x-\frac{2}{3}x+\frac{1}{27} \\ &= x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}. \end{aligned}$$

On peut alors dresser le tableau de signe de de $f(x)-y$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$	
$(3x+1)^3$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

On déduit alors que, la droite $\mathcal{T}$ est située au dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right]$ et $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de $\mathcal{T}$ sur $\left[-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.