Devoir Surveillé n° 8

...../20 - 2 heures

Exercice 1 : (3 points)

1 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$.

- **a** Donner le domaine de définition D_f de f.
- **b** Dire pourquoi f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$.
- **c** Étudier le sens de variation de f.

2 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \geqslant 3$, par : $u_n = \dfrac{3n}{n-2}$. Étudier la monotonie de cette suite.

Exercice 2 : (2 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous. On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

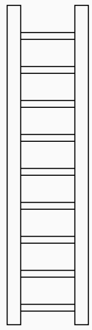
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

1 Construire sur l'axe des abscisses de la figure ci-dessus les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 de la suite (u_n) en utilisant la droite (Δ) d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ et en laissant apparaitre les traits de construction.

2 Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 : (3,5 points)

On s'intéresse à une échelle dont le premier barreau se trouve à une hauteur de 10 cm du sol. Il y a ensuite 30 cm entre chaque barreau.



1 (a) À quelle hauteur le deuxième barreau sera-t- il ?

(b) À quelle hauteur le troisième barreau sera-t-il ?

2 On note u_n la hauteur par rapport au sol du n-ième barreau de l'échelle.

(a) Déterminer la valeur de u_1.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

(c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4 : (6 points)

1 La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. On donne : $u_4 = -2$ et $u_8 = \frac{1}{2}$.

(a) Déterminer la raison r et le terme u_0.

(b) Calculer u_{15}.

(c) Donner, en fonction de n, l'expression de la somme : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. On précisera la formule utilisée (une démonstration est appréciée, le rappel et l'utilisation de la propriété vue dans la leçon sont suffisants).

(d) Calculer S_{100}.

2 La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme v_0. On donne : $v_2 = 9$ et $v_6 = 144$.

(a) Déterminer la raison q et le premier terme v_0.

(b) Donner, en fonction de n, l'expression de la somme : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. On précisera la formule utilisée (une démonstration est appréciée, le rappel et l'utilisation de la propriété vue dans la leçon sont suffisants).

(c) Calculer S_{15}.

Exercice 5 : (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$f(x) = x^3 + x^2 + x.$$

1 Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2 Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f.

3 Étudier la position relative de (d) et de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$.

4 Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ a une, et une seule, tangente de coefficient directeur $\frac{2}{3}$ que l'on nommera $\mathcal{T}$.

5 Montrer que : $\dfrac{(3x+1)^3}{27} = x^3 + x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{27}$.

6 Déduire la position relative de C_f et de $\mathcal{T}$.