Dérivation

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 3 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \frac{2(3+h)-7-(-1)}{h}\\ &= \frac{6+2h-7+1}{h}\\ &= \frac{2h}{h}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=2$. Donc f est dérivable en 3 et $f'(3)=2$.

2 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en a est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h}\\ &= \frac{ma+mh+p-ma-p}{h}\\ &= \frac{mh}{h}\\ &= m.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=m$. Donc f est dérivable en a et $f'(a)=m$.

3 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 2 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{-3(2+h)^2-(-12)}{h}\\ &= \frac{-3(4+4h+h^2)+12}{h}\\ &= \frac{-12-12h-3h^2+12}{h}\\ &= \frac{-12h-3h^2}{h}\\ &= \frac{h(-12-3h)}{h}\\ &= -12-3h.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-12$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=-12$.

4 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 1 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{-\dfrac{2}{1+h}-(-2)}{h}\\ &= \frac{\dfrac{-2+2+2h}{1+h}}{h}\\ &= \frac{2h}{1+h}\times\frac{1}{h}\\ &= \frac{2}{1+h}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$.

5 Soit $h>0$. Le taux d'accroissement de f en 1 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{\sqrt{1+h-1}-0}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{h}\\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ne converge pas, la limite ne donne pas un nombre réel. En effet en remplaçant h par 0, on obtient « + l'infini ». Ainsi, f n'est pas dérivable en 1.

6 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 2 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{-(2+h)^2+7(2+h)-14}{h}\\ &= \frac{-(4+4h+h^2)+14+7h-10}{h}\\ &= \frac{-4-4h-h^2+14+7h-10}{h}\\ &= \frac{-h^2+3h}{h}\\ &= \frac{h(-h+3)}{h}\\ &= -h+3.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 3$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=3$.

7 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 4 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \frac{(4+h)^3-64}{h}\\ &= \frac{4^3+3\times 4^2\times h+3\times 4\times h^2+h^3-64}{h}\\ &= \frac{64+48h+12h^2+h^3-64}{h}\\ &= \frac{h(48+12h+h^2)}{h}\\ &= 48+12h+h^2.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=48$. Donc f est dérivable en 4 et $f'(4)=48$.

$\boxed{8}$ Soit $h\neq 0$. Le taux d'accroissement de f en -2 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{-2+h+1}-(-1)}{h}\\ &= \frac{\dfrac{1}{-1+h}+1}{h}\\ &= \frac{\dfrac{1-1+h}{-1+h}}{h}\\ &= \frac{h}{-1+h}\times\frac{1}{h}\\ &= \frac{1}{-1+h}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=-1$. Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2)=-1$.

$\boxed{9}$ Soit $h\neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 4 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \frac{2\sqrt{4+h}-1-3}{h}\\ &= \frac{2\sqrt{4+h}-4}{h}\\ &= \frac{2(\sqrt{4+h}-2)}{h}\times\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}\\ &= \frac{2(\sqrt{4+h}^2-2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}\\ &= \frac{2h}{h(\sqrt{4+h}+2)}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4+h}+2}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{1}{2}$. Donc, f est dérivable en 4 et $f'(4)=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 :

$\boxed{1}$ Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en -1 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{-(-1+h)^2+(-1+h)+1-(-1)}{h}\\ &= \frac{-(1-2h+h^2)-1+h+1+1}{h}\\ &= \frac{-1+2h-h^2-1+h+1+1}{h}\\ &= \frac{3h-h^2}{h}\\ &= \frac{h(3-h)}{h}\\ &= 3-h.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=3$. Donc, f est dérivable en -1 et $f'(-1)=3$.
Par ailleurs, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -1 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(-1)\,(x-(-1))+f(-1)\\ &= 3\,(x+1)-1\\ &= 3x+2.\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 4 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\times\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}\\ &= \frac{\sqrt{4+h}^2-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{1}{4}$. Donc, f est dérivable en 4 et $f'(4)=\dfrac{1}{4}$.
Par ailleurs, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 4 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(4)\,(x-4)+f(4)\\ &= \frac{1}{4}(x-4)+2\\ &= \frac{1}{4}x+1.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Soit $h>0$. Le taux d'accroissement de f en 0 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{h}\\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=+\infty(\notin\mathbb{R})$, ne converge pas. Donc, f n'est pas dérivable en 0. f admet tout de même une tangente en 0 mais verticale, d'équation $x=0$.

$\boxed{4}$ Soit $h\neq 0$. Le taux d'accroissement de f en -2 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{-2+h}-\dfrac{-1}{2}}{h}\\ &= \frac{\dfrac{1}{-2+h}+\dfrac{1}{2}}{h}\\ &= \frac{2-2+h}{2(-2+h)}\times\frac{1}{h}\\ &= \frac{h}{2(-2+h)}\times\frac{1}{h}\\ &= \frac{1}{-4+2h}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=-\dfrac{1}{4}$. Donc, f est dérivable en -2 et $f'(-2)=-\dfrac{1}{4}$.
Par ailleurs, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -2 est donnée par :

$$\begin{aligned}y &= f'(-2)\,(x+2)+f(-2)\\ &= -\frac{1}{4}\,(x+2)-\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{4}x-1\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Soit $h\neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 2 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{3(2+h)^2-(2+h)-1-9}{h}\\ &= \frac{3(4+4h+h^2)-2-h-10}{h}\\ &= \frac{12+12h+3h^2-2-h-10}{h}\\ &= \frac{11h+3h^2}{h}\\ &= 11+3h.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=11$. Donc, f est dérivable en 2 et $f'(2)=11$.
Par ailleurs, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 2 est donnée par :

$$\begin{aligned}y &= f'(2)\,(x-2)+f(2)\\ &= 11\,(x-2)+9\\ &= 11x-22+9\\ &= 11x-13.\end{aligned}$$

6 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en -1 est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{\frac{1}{-1+h}-(-1)}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{-1+h}+1}{h} \\
&= \frac{1-1+h}{-1+h} \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{1}{-1+h}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -1$. Donc, f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -1$.
Par ailleurs, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -1 est donnée par :

$$\begin{aligned}
y &= f'(-1)(x-(-1))+f(-1) \\
&= -(x+1)-1 \\
&= -x-2.
\end{aligned}$$

7 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 2 est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(h+2)^3-8}{h} \\
&= \frac{h^3+3\times h^2\times 2+3\times h\times 2^2+2^3-8}{h} \\
&= \frac{h^3+6h^2+12h+8-8}{h} \\
&= \frac{h^3+6h^2+12h}{h} \\
&= h^2+6h+12.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 12$. Donc, f est dérivable en 2 et $f'(2) = 12$.
Par ailleurs, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 2 est donnée par :

$$\begin{aligned}
y &= f'(2)(x-2)+f(2) \\
&= 12(x-2)+8 \\
&= -12x-16.
\end{aligned}$$

8 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 0 est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{h^2+h+1-1}{h} \\
&= \frac{h^2+h}{h} \\
&= h+1.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$. Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
Par ailleurs, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$\begin{aligned}
y &= f'(0)(x-0)+f(0) \\
&= 1(x-0)+1 \\
&= x+1.
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

$\boxed{1}$ Soit $n \neq 0$. Pour tout réel a, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2+3(a+h)-1-(a^2+3a-1)}{h} \\ &= \frac{\cancel{a^2}+2ah+h^2+\cancel{3a}+3h-1-\cancel{a^2}-\cancel{3a}+1)}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2+3h}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(2a+h+3)}{\cancel{h}} \\ &= 2a+h+3. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Donc, $f'(a) = 2a+3$.

$\boxed{2}$ L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1) \\ &= 5(x-1)+3 \\ &= 5x-2. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{u}\binom{1}{-2}$ est un vecteur directeur de la droite $y = -2x + \sqrt{17}$.
Dire que qu'une tangente en un point à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = -2x + \sqrt{17}$ revient à dire $\overrightarrow{u}\binom{1}{-2}$ est un vecteur directeur de cette tangente. Autrement dit, $f'(a) = -2$.
Or, l'équation $f'(a) = -2$ admet une solution. Donc, il existe bel et bien une tangente en un point de $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = -2x + \sqrt{17}$.

$\boxed{4}$ $\left(-\dfrac{5}{2}\,;\, -\dfrac{9}{4}\right)$ sont les coordonnées du point de contact entre cette tangente et $\mathscr{C}_f$. En effet,

$$\begin{aligned} f'(a) = -2 &\Leftrightarrow 2a+3 = -1 \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

En outre, $f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$. D'où le résultat.

Exercice 4 :

On considère la fonction définie par la courbe ci-après et certaines des tangentes à la courbe.

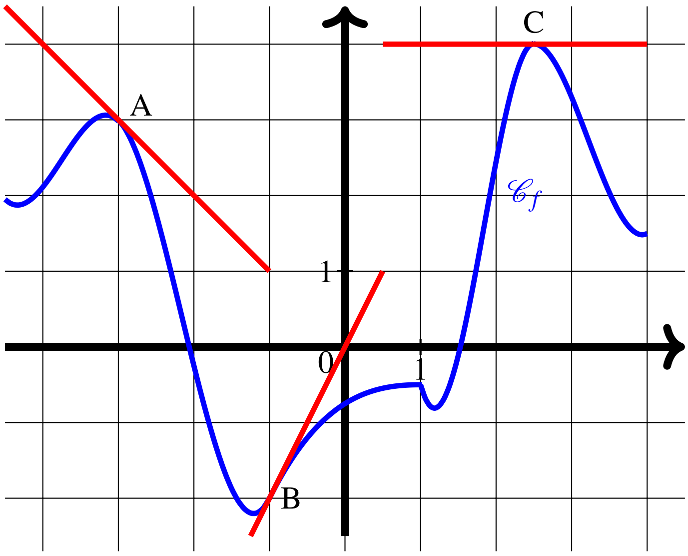
$\boxed{1}$ Dans chacun des cas suivants, donner $f(a)$ et $f'(a)$.

(a) $f(-3) = 3$ et $f'(-3) = \dfrac{4-1}{-4-(-1)} = \dfrac{3}{-3} = -1$.

(b) $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = \dfrac{-2-0}{-1-0} = 2$.

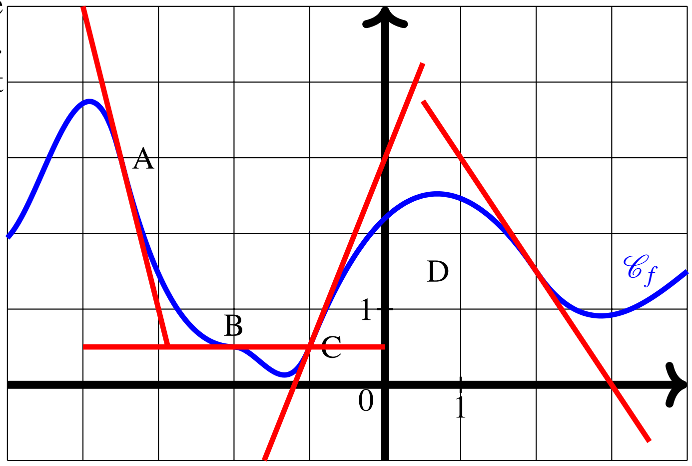
(c) $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 4$ et $f'\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$, car la tangente est horizontale.

$\boxed{2}$ f n'est pas dérivable en $a = 1$ car la courbe présente un point anguleux. Cela signifie que la courbe a deux demi-tangentes différentes à droite et à gauche en 0.



Exercice 5 :

On considère la fonction définie par la courbe ci-contre et certaines des tangentes à la courbe. Dans chacun des cas suivants, donner $f(a)$ et $f'(a)$.



1. $f(-3,5) = 3$ et $f'(-3,5) = -\dfrac{4}{1} = -4$.

2. $f(-2) = 0,5$ et $f'(-2) = 0$.

3. $f(-1) = -0,5$ et $f'(-1) = \dfrac{2,5}{1} = 2,5$.

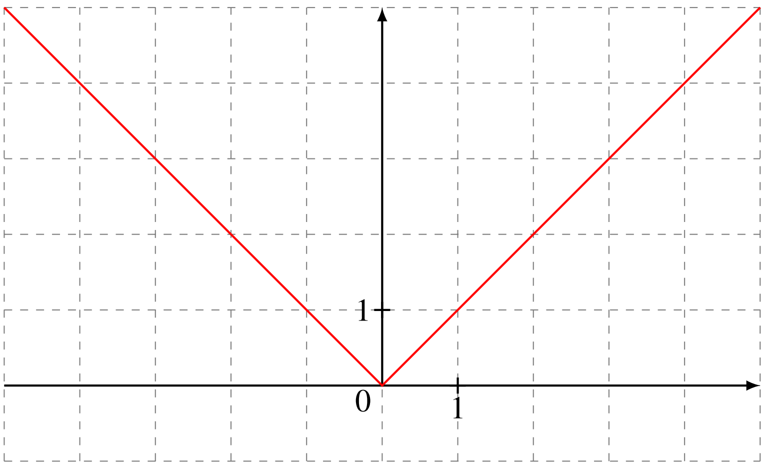
4. $f(2) = 1,5$ et $f'(2) = -\dfrac{3}{2}$.

Exercice 6 :

On considère la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1. Graphiquement :

   (a) Ci-après la courbe représentative de f.



f n'est pas dérivable en $a = 0$ car la courbe présente un point anguleux. Cela signifie que la courbe a deux demi-tangentes différentes à droite et à gauche en 0.

(b) « À gauche de 0 » : le coefficient directeur de l'équation de la tangente en 0, est $f'(0) = -1$.
« À droite de 0 » : le coefficient directeur de l'équation de la tangente en 0, est $f'(0) = 1$.
La dérivée à gauche de 0 est différente de l'équation de la dérivée à droite de 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

$\boxed{2}$ Algébriquement :

(a) Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 0 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{|h|}{h}\\ &= \begin{cases}-1 & \text{si } h<0\\ 1 & \text{si } h>0\end{cases}\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$. Donc , f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7 :

Soit $f : x \mapsto x|x|$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Donc, $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 0 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \frac{h^2}{h}\\ &= h.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$. Donc, $f'(0) = 0$.

Exercice 8 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0\\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0\end{cases}.$$

Soit $h < 0$. Lorsque $x \leqslant 0$, le taux d'accroissement de f en 0 est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{\frac{1}{1-h}-1}{h}\\ &= \frac{\frac{1-1+h}{1-h}}{h}\\ &= \frac{h}{1-h}\times\frac{1}{h}\\ &= \frac{1}{1-h}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$. Donc, le nombre dérivé à gauche de 0 est $f'(0) = 1$.

Soit $h > 0$. Lorsque $x \geqslant 0$, le taux d'accroissement de f en 0 est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{1+h}-1}{h} \\
&= \frac{\dfrac{1-1-h}{1+h}}{h} \\
&= \frac{-h}{1+h} \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{-1}{1+h}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$. Donc, $f'(0) = -1$.
Le nombre dérivé en 0 ne pouvant être simultanément égal à deux valeurs distinctes, il n'existe pas. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

Exercice 9 :

Le taux d'accroissement en a de la fonction f définie par $f(x) = (x-5)^3$ est égal à :

$$h^2 + (3a-15)h + 3a^2 - 30a + 75.$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3a^2 - 30a + 75.$. Donc, $f'(a) = 3a^2 - 30a + 75$.

Exercice 10 :

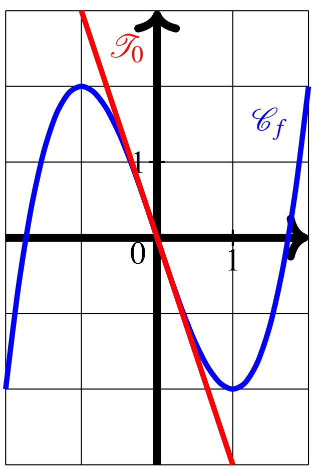
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, C_f sa courbe représentative, $A(-1;3)$ un point de C_f et T_A la tangente à C_f en A.

1. Lorsque la tangente passe par $O(0\ ;\ 0)$: $f'(-1) = \dfrac{3-0}{-1-0} = -3$.

2. Lorsque la tangente passe par $B(1\ ;\ 3)$: $f'(-1) = \dfrac{3-3}{-1-1} = 0$.

3. Lorsque la tangente passe par $C(2;5)$: $f'(-1) = \dfrac{5-3}{2-(-1)} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 11 :



1. Selon la représentation graphique :
   $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{3-(-3)}{-1-1} = -3$.

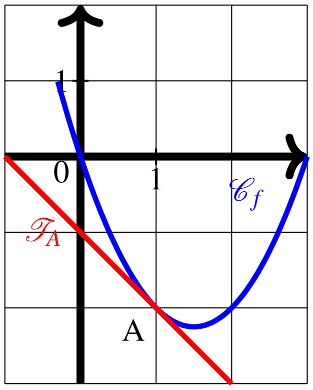
2. Le nombre dérivé de la fonction f est nul en -1 et en 1.

3. Le nombre dérivé de la fonction f est négatif sur : $[-1\ ;\ 1]$, car f est décroissante sur cet intervalle.

4. Le nombre dérivé de la fonction f est positif sur l'ensemble : $[-2\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ 2]$, car f est croissante sur les deux intervalles $[-2\ ;\ -1]$ et $[1\ ;\ 2]$.

Exercice 12 :

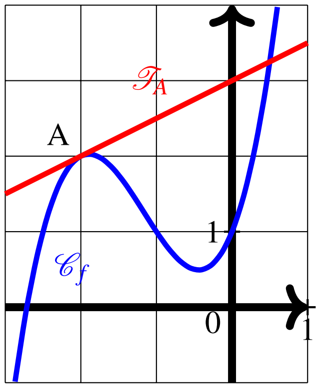
$\boxed{1}$ Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique ci-après.



Selon la représentation graphique :
$f(1) = -2$ et $f'(1) = \dfrac{0-(-3)}{-1-2} = -1$. Ainsi, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)\,(x-1) + f(1) \\ &= -\,(x-1) - 2 \\ &= -x - 1. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique.



Selon la représentation graphique :
$f(-2) = 2$ et $f'(-2) = \dfrac{2-3}{-2-0} = 0,5$. Ainsi, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -2 est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(-2)\,(x+2) + f(-2) \\ &= 0,5\,(x+2) + 2 \\ &= 0,5x + 3. \end{aligned}$$

Exercice 13 :

$\boxed{1}$ Pour tous réels a et b, $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

$\boxed{2}$ Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en a est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h-a)(2a+h)((a+h)^2 + a^2)}{h} \\ &= (2a+h)((a+h)^2 + a^2). \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = (2a+h)((a+h)^2 + a^2)$. Donc, $f'(a) = 4a^3$.