Fonctions de référence

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1 Posons $f(x)=\sqrt{x}$. Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.
Comparons $f(a)$ et $f(b)$ en étudiant le signe de leur différence :
$f(a)-f(b)=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\dfrac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
Dès lors, $a-b<0$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ entraîne $f(a)-f(b)<0$. Autrement dit, $f(a)<f(b)$.

2 .

(a) $3,79 < 3,8$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{3,79} < \sqrt{3,8}$.

(b) $4 < \pi+1$.
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc
$\sqrt{4} < \sqrt{\pi+1}$ donc $2 < \sqrt{\pi+1}$.

3 On examine les conditions d'existence de l'équation : $x-1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 1$.
On résout alors l'équation dans $[1\ ;\ +\infty[$.

$$\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x-1=2^2 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5$$

Cette solution convient car elle appartient à $[1\ ;\ +\infty[$, donc $S=\{5\}$.

4 On examine les conditions d'existence de l'équation : $x \geq 0$. On la résout dans $[0\ ;\ +\infty[$.
$\sqrt{x} > 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 > \left(10^{-3}\right)^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
$\Leftrightarrow x > 10^{-6}$
Ainsi, $S=\left]10^{-6}\ ;\ +\infty\right[$.

Exercice 2 :

1 D'une part, pout tout $x \in [0\ ;\ 1]$ on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow 0\times x \leq x\times x \leq 1\times x, \text{ car } x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq x.\ (*) \end{aligned}$$

D'autre part, pout tout $x \in [0\ ;\ 1]$ on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow \sqrt{0} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{1}, \text{ car la fonction racine carrée est croissante} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{0}\times\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\times\sqrt{x} \leq \sqrt{1}\times\sqrt{x}, \text{ car la fonction racine carrée est positive} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{x}.\ (**) \end{aligned}$$

De relations (*) et (**), on déduit : $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.

2 D'une part, pout tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} x \geqslant 1 &\Leftrightarrow x\times x \geq 1\times x, \text{ car } x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq x.\ (*) \end{aligned}$$

D'autre part, pout tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} x \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \geq \sqrt{1}, \ \text{ car la fonction racine carrée est croissante} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \times \sqrt{x} \geq \sqrt{1} \times \sqrt{x}, \ \text{ car la fonction racine carrée est positive} \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq \sqrt{x}. \ (**) \end{aligned}$$

De relations (*) et (**), on déduit : $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Exercice 3 :

$\boxed{1}$ La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

La fonction $x \mapsto -x$ est linéaire, -1 est son coefficient directeur. -1 étant négatif, cette fonction est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

La fonction (identité) $x \mapsto x$ est linéaire. 1 est son coefficient directeur. 1 étant positif, cette fonction est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$\boxed{2}$ Par définition, on a d'une part :

$$|x-3| = \begin{cases} -(x-3) & \text{si } x-3 \leqslant 0 \\ x-3 & \text{si } x-3 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \leqslant 3 \\ x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}.$$

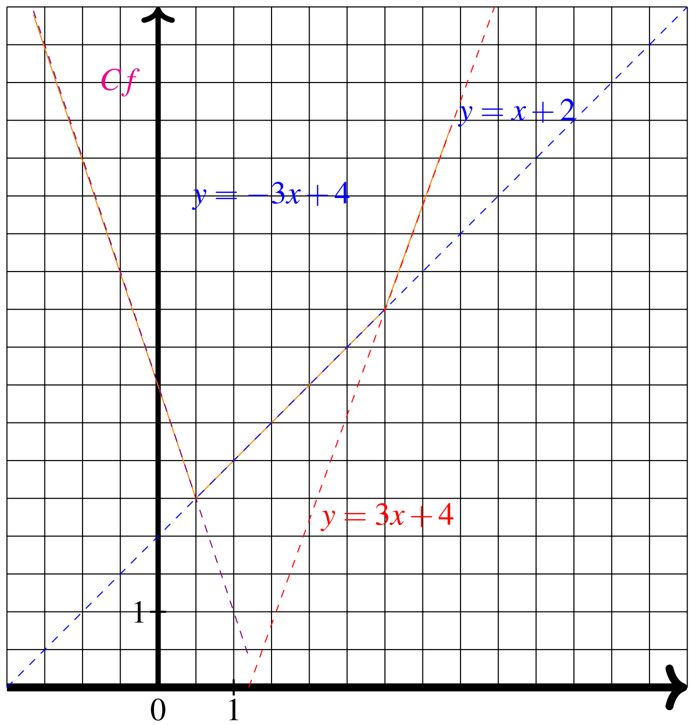
Et, d'autre part :

$$|-2x+1| = \begin{cases} -(-2x+1) & \text{si } -2x+1 \leqslant 0 \\ -2x+1 & \text{si } -2x+1 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{si } x \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

On déduit alors l'expression de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$\lvert x-3\rvert$		$-x+3$		$-x+3$	0	$x-3$	
$\lvert -2x+1\rvert$		$-2x+1$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$f(x)$		$-3x+4$		$x+2$		$3x-4$	

$\boxed{3}$ Voici la représentation graphique de la fonction f.



Exercice 4 :

$\boxed{1}$ Traitons le cas où u est croissante sur I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. u étant croissante sur I, donc $0 \leqslant u(a) \leqslant u(b)$.
Par ailleurs, la fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$.
Ainsi, la fonction $\sqrt{u}$ est également croissante sur I.
La démonstration est analogue lorsque u est décroissante sur I.

$\boxed{2}$ Soit f la fonction telle que : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

(a) L'expression $\sqrt{x^2 + 3x - 4}$ existe lorsque $x^2 + 3x - 4 \geq 0$.
Le discriminant du trinôme $x^2 + 3x - 4$ est égal à : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1(-4) = 25 = 5^2$.
Δ étant strictement positif, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

Ce trinôme est du signe opposé de son coefficient principal a entre les deux racines, est du signe de a ailleurs. Ainsi,

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, f est bien définie sur $]-\infty\ ;\ -4] \cup [1\ ;\ +\infty[$.

(b) Pour déterminer le sens de variations du trinôme $x^2 + 3x - 4$, il suffit de donner sa forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 4 &= x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

$a = 1$. a étant strictement positif, la parabole représentant $x^2 + 3x - 4$ est orientée vers le haut. Ainsi,

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
x^2+3x-4	↘	$-\frac{25}{4}$	↗

Or, les deux fonctions $x \longmapsto x^2+3x-4$ et $x \longmapsto \sqrt{x^2+3x-4}$ ont les mêmes sens de variations. Ainsi,

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	0	↗

Autrement dit, u est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, implique que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-4]$ et croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

Exercice 5 :

$\boxed{1}$ Dans le cas où u est croissante sur I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a<b$. u étant croissante sur I, $u(a) \leq u(b)$.
De plus, u ne s'annule pas sur I et garde le même signe.

- Si $u(a)>0$ et $u(b)>0$, alors la fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a $\dfrac{1}{u(a)} \geq \dfrac{1}{u(b)}$. Ainsi, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I.
- Si $u(a)<0$ et $u(b)<0$, alors la fonction inverse étant décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$, on a : $\dfrac{1}{u(a)} \geq \dfrac{1}{u(b)}$. Ainsi, la fonction $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I.

$\boxed{2}$ On pose $u(x)=-2x+10$. u est une fonction affine, -2 est son coefficient directeur. -2 étant négatif, cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction inverse $\dfrac{1}{u}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$. En effet, $-2x+10 \neq 0$ autrement dit $x \neq 5$.
Or, on sait que les fonction u et $\dfrac{1}{u}$ ont des sens de variations contraires. Donc,

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$u(x)$	↘	0	↘
$f(x)$	↗	‖	↗

Exercice 6 :

$\boxed{1}$ Soit a et b deux réels positifs. On a :

$$\begin{aligned} X-Y &= a^2+b^2-(a+b)^2 \\ &= a^2+b^2-(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^2+b^2-a^2-2ab-b^2 \\ &= -2ab. \end{aligned}$$

Dès lors, $-2ab \leq 0$. Ce qui implique que $X-Y \leqslant 0$. Autrement dit, $a^2+b^2 \leqslant (a+b)^2$.

$\boxed{2}$ D'après la question précédente, on sait que pour tout a et b dans $\mathbb{R}^+$:

$$a^2+b^2 \leqslant (a+b)^2.$$

Par ailleurs, la fonction racine carrée est croissante, donc :

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant \sqrt{(a+b)^2}.$$

Autrement dit, $\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$.

Exercice 7 :

$\boxed{1}$ On pose $x=\sqrt{2}-1$. La fonction racine carrée est croissante, donc :

$$1<2<4 \quad \text{implique que} \quad \sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}.$$

Ainsi, en soustrayant 1 de chaque membre, on obtient :

$$\sqrt{1}-1<\sqrt{2}-1<\sqrt{4}-1 \Leftrightarrow 0<\sqrt{2}-1<1.$$

Or, on sait que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$; $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$. Donc, $(\sqrt{2}-1)^2 < \sqrt{2}-1 < \sqrt{\sqrt{2}-1}$.

$\boxed{2}$ On pose $x=\sqrt{5}-1$. La fonction racine carrée est croissante, donc :

$$4<5 \quad \text{implique que} \quad \sqrt{4}<\sqrt{5}.$$

Ainsi, en soustrayant 1 de chaque membre, on obtient :

$$\sqrt{4}-1<\sqrt{5}-1 \Leftrightarrow 1<\sqrt{5}-1.$$

Or, on sait que pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$; $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$. Donc, $\sqrt{\sqrt{5}-1} < \sqrt{5}-1 < (\sqrt{5}-1)^2$.

Exercice 8 :

$\boxed{1}$ Pour tout réel a tel que $1 \leq a \leq 2$, on a : $1-1 \leq a-1 \leq 2-1$. Autrement dit, $1-1 \leq a-1 \leq 2-1$.
Or, on sait que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$; $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$. Donc, $(a-1)^2 < a-1 < \sqrt{a-1}$.

$\boxed{2}$ Pour tout réel a tel que $1 \leq a \leq 2$, on a : $2\times 1-1 \leq 2a-1 \leq 2\times 2-1$, car la fonction affine $x \longrightarrow 2x-1$ de coefficient directeur 2 est croissante. Autrement dit, $1 \leq 2a-1 \leq 3$.
Or, on sait que pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$; $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$. Donc, $\sqrt{2a-1} < 2a-1 < (2a-1)^2$.

Exercice 9 :

1 Par définition, on a d'une part :

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) & \text{si } x-1 \leqslant 0 \\ x-1 & \text{si } x-1 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

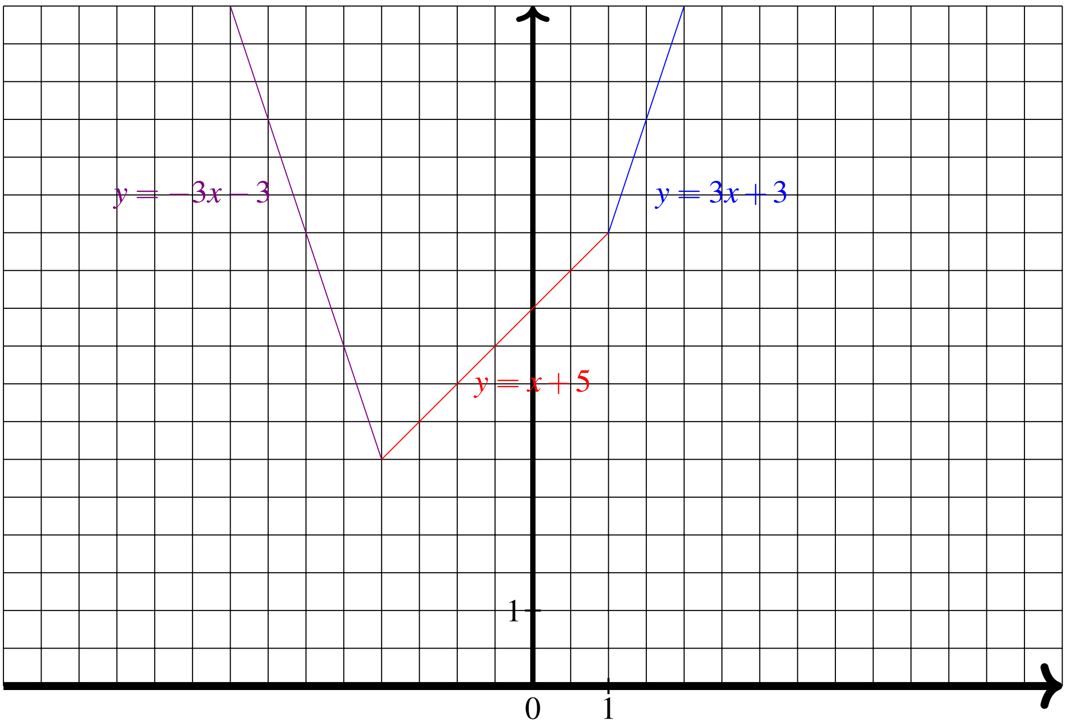
Et, d'autre part :

$$|x+2| = \begin{cases} -(x+2) & \text{si } x+2 \leqslant 0 \\ x+2 & \text{si } x+2 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} -2-x & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+2 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}.$$

On déduit alors l'expression de f.

x	$-\infty$ … -2	-2 … 1	1 … $+\infty$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$2\|x+2\|$	$-2x-4$	$2x+4$	$2x+4$
$f(x)$	$-3x-3$	$x+5$	$3x+3$

2 Ci-après la représentation graphique de f.



Exercice 10 :

Soit f la fonction telle que $f(x) = \sqrt{2x-18}$.

1 La fonction f est bien définie lorsque $2x-18 \geq 0$. Autrement dit, lorsque $x \geq 9$. Ainsi, $D_f = [9\,;\,+\infty[$.

2 La fonction $x \mapsto 2x-18$ est affine. 2 est son coefficient directeur. 2 étant positif, cette fonction est croissante sur $[9\,;\,+\infty[$.
Par ailleurs, les fonctions $x \mapsto 2x-18$ et $x \mapsto \sqrt{2x-18}$ ont le même sens de varitions, ainsi f est

croissante sur $[9~;~+\infty[$.

Exercice 11 :

$\boxed{1}$ Pour étudier les variations de la fonction polynôme u, il suffit de déterminer sa forme canonique :

$$\begin{aligned} u(x) &= -2x^2+2x \\ &= -2(x^2-x) \\ &= -2\left(x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \\ &= -2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right) \\ &= -2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$a=-1$. a étant négatif, la parabole représentant u est orientée vers le bas. Ainsi,

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$u(x)$		↗	0	↗		↘	0	↘	

$\boxed{2}$ La fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{-2x^2+2x}$ est bien définie lorsque $-2x^2+2x\neq 0$. Autrement dit, lorsque $x\neq 0$ et $x\neq 1$. Ainsi, $D_{\frac{1}{u}}=\mathbb{R}\setminus\{0~;~1\}$.

Par ailleurs, on sait que les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ ont des sens variations contraires. Ainsi

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\dfrac{1}{u(x)}$		↘		↗	

$\dfrac{1}{u}$ est strictement décroissante sur $\left]0~;~\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right[$.

Exercice 12 :

$\boxed{1}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x-2|+|x+1|$.

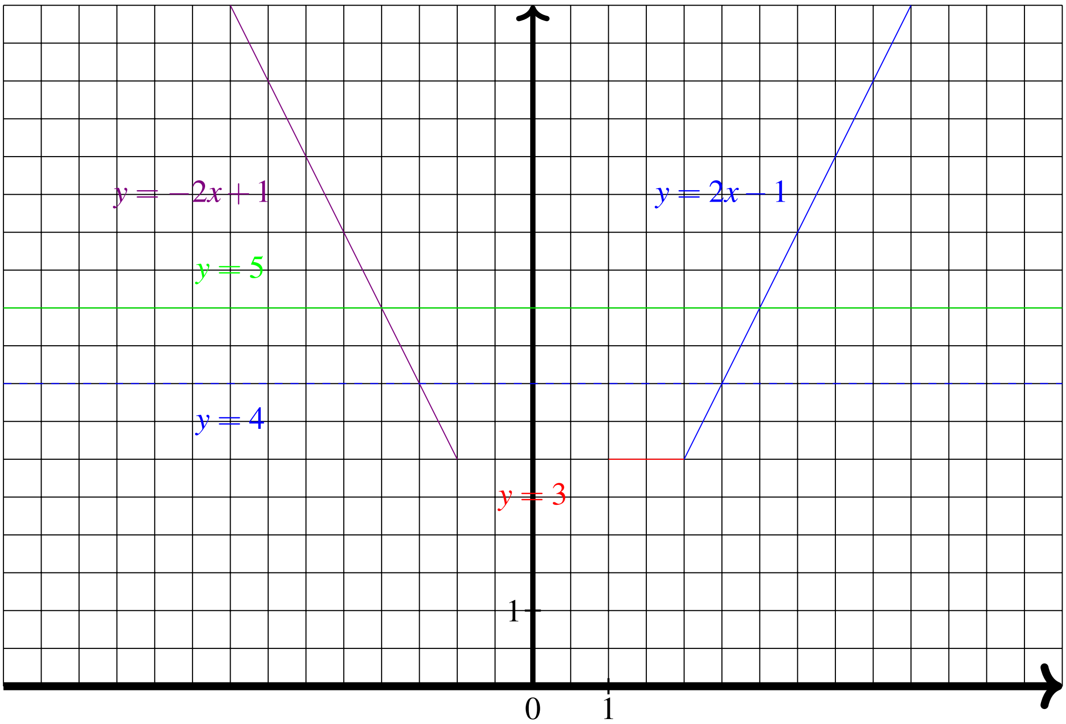
x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$		
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$	$2-x$	0 $x-2$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$ 0	$x+1$	$x+1$
$f(x)$	$-2x+1$	3	$2x-1$

2 La fonction $x \longrightarrow -2x+1$ est affine. -2 est son coefficient directeur. -2 étant négatif la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.
Pour tout $x \in [-1\ ;\ 2]$, $f(x) = 3$. La fonction f est constante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
La fonction $x \longrightarrow 2x-1$ est affine. 2 est son coefficient directeur. 2 étant positif la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$.
Ci-après le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	3 $\longrightarrow$	3	$\nearrow$

3 Ci-après la courbe C_f représentative de f.

4 Ci-après la représentation graphique de f.



5 Si $x \leqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Leftrightarrow -2x+1 = 5 \\ &\Leftrightarrow -2x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Ainsi, -2 est une solution de cette équation.

Si $x \geqslant 5$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Leftrightarrow 2x-1=5 \\ &\Leftrightarrow 2x=6 \\ &\Leftrightarrow x=3. \end{aligned}$$

Ainsi, 3 est une solution de cette équation. Par conséquent, $S = \{-2\ ;\ 3\}$.
Graphiquement, il est assez aisé de constater que la droite d'équation $y = 5$ coupe C_f en deux points.
Donc, l'équation $f(x) = 5$ admet deux solutions.

$\boxed{6}$ Si $x \leqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) < 4 &\Leftrightarrow -2x+1<4 \\ &\Leftrightarrow -2x<3 \\ &\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Si $x \geqslant 5$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) < 4 &\Leftrightarrow 2x-1<4 \\ &\Leftrightarrow 2x<5 \\ &\Leftrightarrow x<\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $S = \left]-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right[$.
Graphiquement, il est assez aisé de de vérifier que la courbe C_f est située en dessous de la droite d'équation $y = 5$ sur l'intervalle $S = \left]-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right[$.