1re Spé Maths
Entraînement

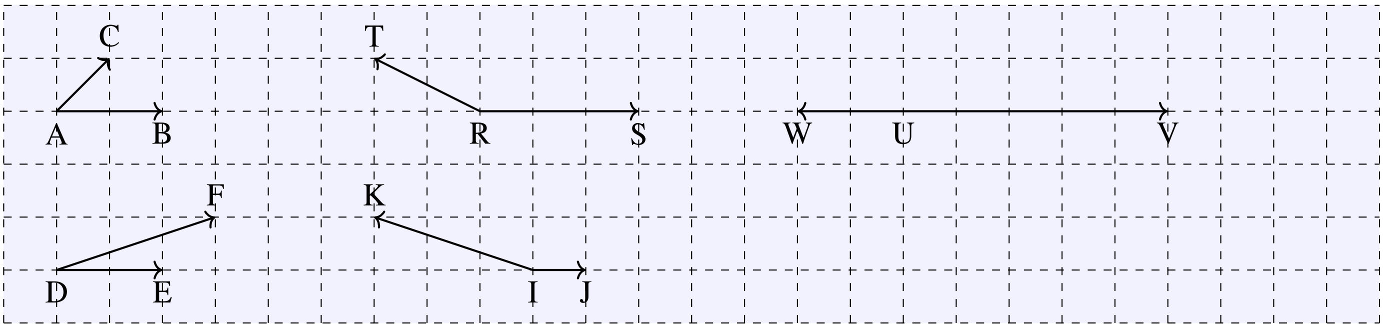
Produit Scalaire

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

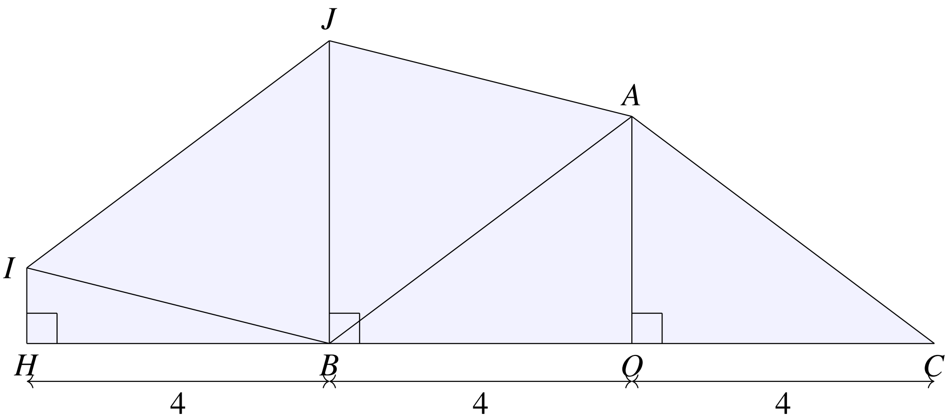
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la configuration ci-dessous où un carreau représente une unité de longueur, déterminer les produits scalaires suivants :

1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2 $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT}$; 3 $\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{UW}$; 4 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$; 5 $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$.



Exercice 2 :

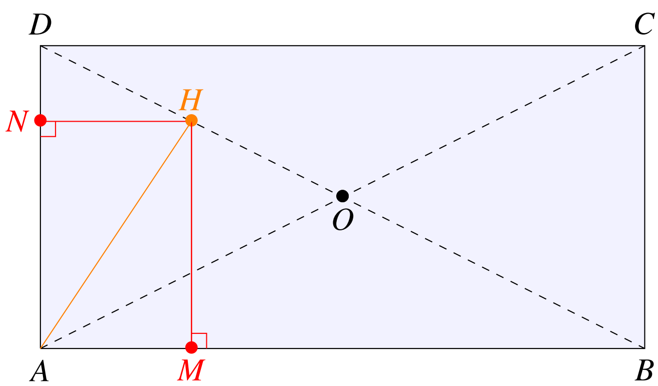
Dans la configuration ci-dessous, déterminer les produits scalaires suivants :



1 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$; 2 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JC}$; 3 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AJ}$; 4 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IA}$; 5 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BI}$; 6 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI}$.

Exercice 3 :

Dans la configuration ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle de centre O, H est le projeté orthogonal de A sur (BD) et le point H se projette orthogonalement en M sur (AB) et en N sur (AD).



1 Justifier que les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ sont égaux.

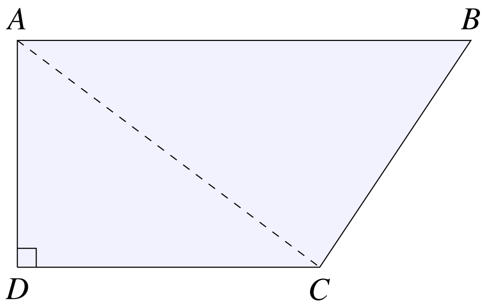
2 Justifier, de même, que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HA}$.

3 En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$.

4 Montrer qu'on peut en conclure que les droites (AC) et (NM) sont perpendiculaires.

Exercice 4 :

Dans la figure ci-dessous : $ABCD$ est un trapèze rectangle et $(AC) \perp (BC)$.
En exprimant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, montrer que $AC^2 = AB \times CD$.



Exercice 5 :

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants :

1 $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 7$, $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{4}$;

2 $\|\vec{u}\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$;

3 $\|\vec{u}\| = 4$,$\|\vec{v}\| = \dfrac{3}{2}$, $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice 6 :

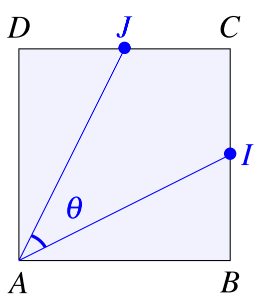
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.
Calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et en déduire les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 7 :

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et en déduire les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 8 :

Dans la figure ci-dessous $ABCD$ est un carré de côté 2, I est le milieu de $[BC]$, J est le milieu de $[DC]$ et on note θ une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$. On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

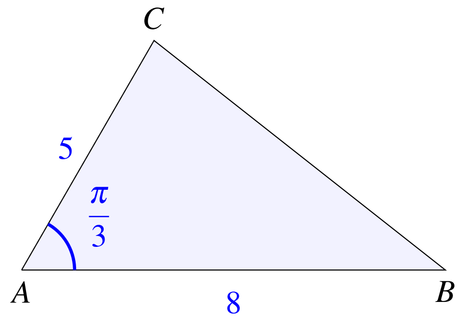


1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$.

2 En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ et la valeur de $\cos\theta$.

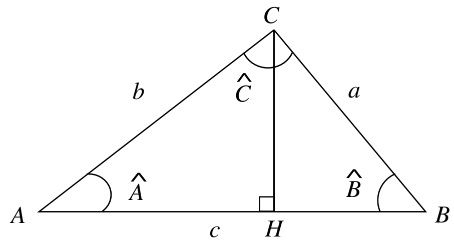
Exercice 9 :

En utilisant le Théorème d'Al-Kashi, déterminer la valeur de BC dans la configuration suivante.



Exercice 10 :

Dans le triangle ABC ci-dessous, on note H le pied de la hauteur issue de C et S l'aire du triangle.

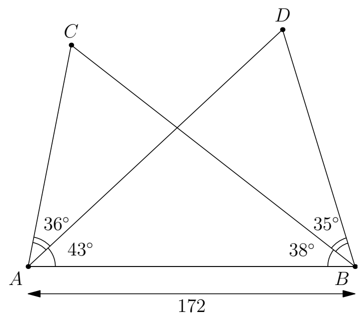


1 Exprimer CH en fonction de b et de $\sin\widehat{A}$. En déduire que $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

2 Montrer que $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{abc}{2S}$. En déduire que $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$.

3 Quelle est la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ si on a $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$.

4 On considère la configuration ci-dessous :

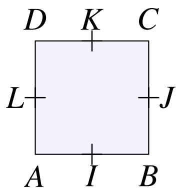


(a) En considérant le triangle ACB, compléter l'égalité $\frac{AC}{\sin\ldots\ldots} = \frac{172}{\sin\ldots\ldots}$.
En déduire la distance AC.

(b) En considérant le triangle ADB, compléter l'égalité $\frac{AD}{\sin\ldots\ldots} = \frac{172}{\sin\ldots\ldots}$.
En déduire la distance AD.

(c) En utilisant le Théorème d'Al-Kashi dans le triangle ACD, déterminer la distance CD.

Exercice 11 :



On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et I, J, K et L les milieux des côtés.
Associer chacun des produits scalaires avec le calcul ou le résultat auquel il est égal.

— $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BL}$.
— $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}$.
— $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{KL}$.
— $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{LK}$.

— $AB\times AI$.
— $-IB\times IA$.
— $BC\times BJ$.
— 0.

Exercice 12 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans les cas suivants :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$;
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2+\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$;
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}a-2\\3a\end{pmatrix}$; $\quad(a\in\mathbb{R})$.

Exercice 13 :

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou non dans les cas suivants :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$;
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\\sqrt{3}+2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix}$.

Exercice 14 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur que m doit prendre pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2-m\\5\end{pmatrix}$ $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1+m\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\m-8\end{pmatrix}$ $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}m-3\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 15 :

On considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

Exercice 16 :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$.

1. Calculer $\vec{u}^2$ et $\vec{v}^2$.

2 En déduire $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, $(\vec{u}+2\vec{v})^2$, $(-3\vec{u}+\vec{v})^2$.

Exercice 17 :

Les droites suivantes sont-elles perpendiculaires ?

1 (AB) et (CD) avec $A(1\ ;\ -3)$, $B(-1\ ;\ 5)$, $C(-8\ ;\ 3)$ et $D(7\ ;\ 7)$.

2 (EF) et d_1 d'équation $x+2y-7=0$ avec $E(1\ ;\ 7)$ et $F(3\ ;\ 11)$.

3 (d_2) et (d_3) d'équation respective $4x-8y-11=0$ et $-2x-y=5$.

Exercice 18 :

On considère les points $A(1\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(-2\ ;\ -2)$, $D(13\ ;\ -5)$ et $E(4\ ;\ 3)$.

1 Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?

2 Même question pour :

(a) (AC) et (BD).

(b) (BE) et (CD).

Exercice 19 :

Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ avec :

1 $\|\overrightarrow{u}\|=5$, $\|\overrightarrow{v}\|=2$ et $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=0,1$.

2 $\|\overrightarrow{u}\|=23$, $\|\overrightarrow{v}\|=11$ et $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=0,93$.

3 $\|\overrightarrow{u}\|=5$, $\|\overrightarrow{v}\|=8$ et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$.

4 $\|\overrightarrow{u}\|=7$, $\|\overrightarrow{v}\|=2$ et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\frac{5\pi}{3}\ (2\pi)$.

5 $\|\overrightarrow{u}\|=12$, $\|\overrightarrow{v}\|=6$ et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

6 $\|\overrightarrow{u}\|=9$, $\|\overrightarrow{v}\|=6$ et $\overrightarrow{u}=-1,5\overrightarrow{v}$.

Exercice 20 :

Calculer $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ avec :

1 $\|\overrightarrow{a}\|=\frac{5}{6}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\|=\frac{\sqrt{3}}{8}$ et $\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)=-\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.

2 $\|\overrightarrow{a}\|=\sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\|=6$ et $\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

3 $\|\overrightarrow{a}\|=2\sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\|=\sqrt{8}$ et $\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)=\pi\ (2\pi)$.

4 $\|\overrightarrow{a}\|=\sqrt{2}+1$ et $\overrightarrow{b}=\sqrt{3}\overrightarrow{a}$.

Exercice 21 :

On considère un triangle ABC avec $AB=5$ et $BC=6$ et $\widehat{ABC}=60^\circ$.

1 Faire une figure.

2. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

3. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Exercice 22 :

On considère trois points $R(-1\ ;\ -2)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(3\ ;\ 6)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT}$, RS et RT.

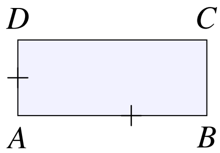
   (b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à $0,01$ degré près.

2. Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.

3. En déduire $\widehat{STR}$.

Exercice 23 :

On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous, tel que $AB = 5$ et $AD = 2$, E est le milieu de $[AD]$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 3$.



En se plaçant dans un repère orthonormé adapté et à l'aide du produit scalaire, déterminer, à 0,01 degré près :

1. $\widehat{BAC}$;
2. $\widehat{DFB}$;
3. $\widehat{DFC}$;
4. $\widehat{CEF}$.

Exercice 24 :

Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ avec :

1. $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ et $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = 10$.

2. $\|\overrightarrow{u}\| = 3\sqrt{5}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$.

3. $\overrightarrow{u}\binom{1}{2}$ et $\overrightarrow{v}\binom{6}{12}$.

4. $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 5$ et $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

5. $\|\overrightarrow{u}\| = 8$ et $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{u}$.