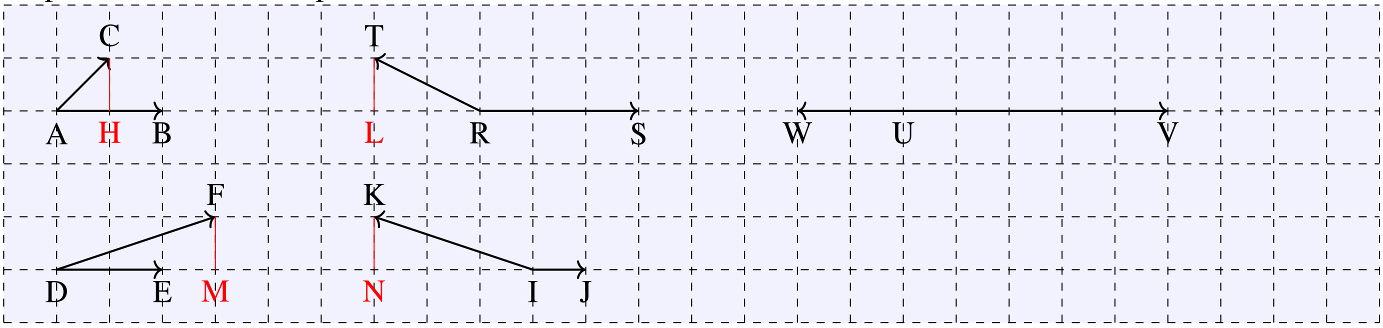
Produit Scalaire

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

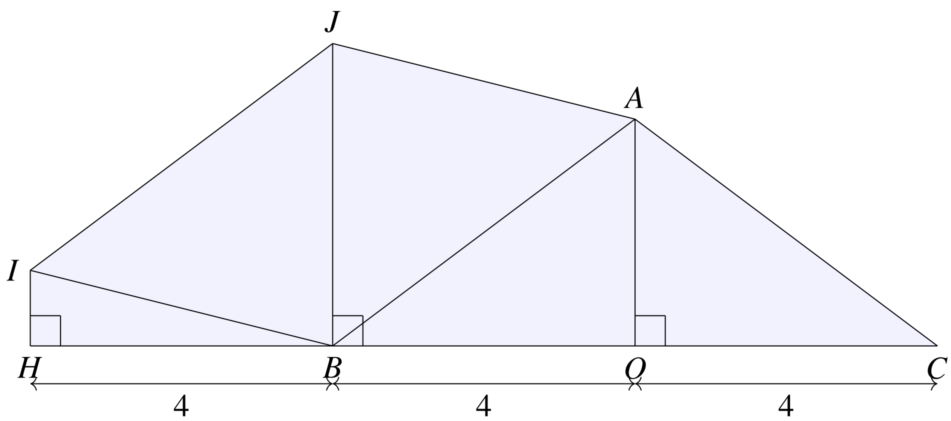
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.



1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB\times AH = 2\times 1 = 2.$
2. $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RL} = -RS\times RI = -3\times 2 = -6.$
3. $\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{UW} = -UV\times UW = -5\times 2 = -10.$
4. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = DE\times DM = 2\times 3 = 6.$
5. $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = -IJ\times IK = -3\times 1 = -3.$

Exercice 2 :

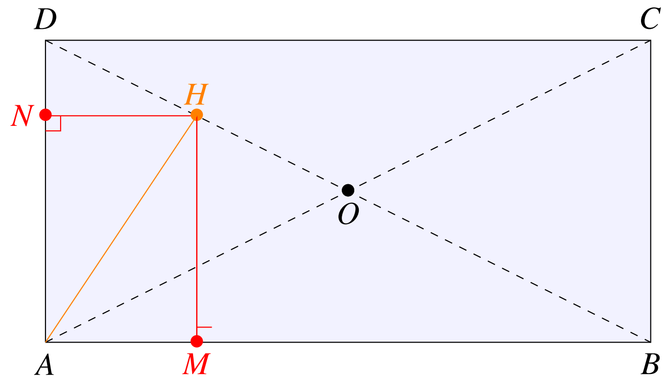
Dans la configuration ci-dessous, déterminer les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO} = BC\times BO = 8\times 4 = 32.$
2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = BC\times BC = 8\times 8 = 64.$
3. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB} = -BC\times OB = -8\times 4 = -32.$
4. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{HO} = BC\times HO = 8\times 8 = 64.$
5. $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BH} = -BO\times BH = -4\times 4 = -16.$
6. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CH} = -BC\times CH = -8\times 12 = -96.$

Exercice 3 :

Dans la configuration ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle de centre O, H est le projeté orthogonal de A sur (BD) et le point H se projette orthogonalement en M sur (AB) et en N sur (AD).



1. $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{AH}$ se projettent orthogonalement sur (AB) en $\overrightarrow{AM}$, donc on a :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

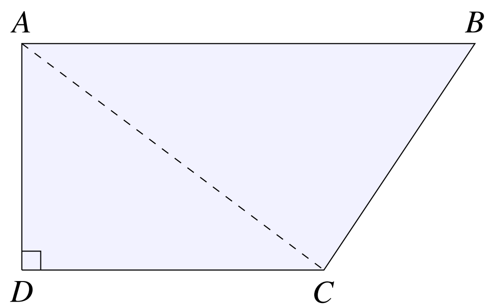
2. $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{HA}$ se projettent orthogonalement sur (AD) en $\overrightarrow{NA}$, donc on a :
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{NA}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HA}$.

3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ car $(DB)\perp(AH)$.

4. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{NM}=0$.
On en déduit que (AC) et (NM) sont perpendiculaires.

Exercice 4 :

En projetant $\overrightarrow{AB}$ sur (AC), $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=AC\times AC=AC^2$.
En projetant $\overrightarrow{AC}$ sur (AB), $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH=AB\times CD$ car $AH=CD$.
On en déduit bien que $AC^2=AB\times CD$.



Exercice 5 :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})=4\times7\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=14\sqrt{2}$.

2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{3}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}.$

Exercice 6 :

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Les mesures principales possibles de $(\vec{u},\vec{v})$ sont donc $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 7 :

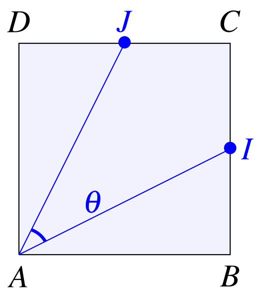
On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{\sqrt{3}\times(-3)+1\times\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\times\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times 2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}.$

Les mesures principales possibles de $(\vec{u},\vec{v})$ sont donc $\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 8 :

Dans la figure ci-dessous $ABCD$ est un carré de côté 2, I est le milieu de $[BC]$, J est le milieu de $[DC]$ et on note θ une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$. On se place dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

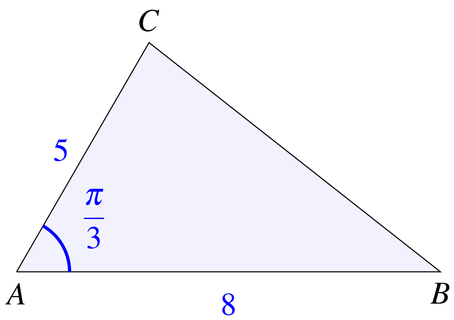


$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = 2\times1+1\times2 = 4.$

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}}{AI\times AJ} = \dfrac{4}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}.$

Exercice 9 :

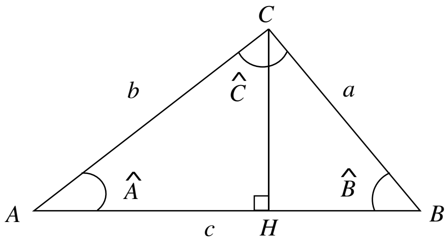


D'après la formule d'Al Kashi, on a

$BC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 64 + 25 - 80 \times \frac{1}{2} = 49.$

Exercice 10 :

Dans le triangle ABC ci-dessous, on note H le pied de la hauteur issue de C et S l'aire du triangle.



1. On a $\sin\widehat{A} = \dfrac{CH}{b}$, donc $CH = b\sin\widehat{A}$.

   Dès lors, $S = \dfrac{AB \times CH}{2} = \dfrac{1}{2} bc \sin\widehat{A}$.

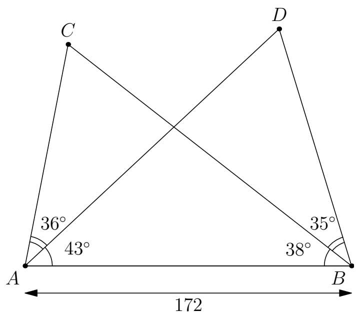
2. D'après la question précédente, $2S = bc\sin\widehat{A}$. On en déduit que $\sin\widehat{A} = \dfrac{2S}{bc}$ et que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{a}{\frac{2S}{bc}} = \dfrac{abc}{2S}$.

   De même, on montrerait que $\dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{abc}{2S}$ et que $\dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{abc}{2S}$.

   On a donc bien $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$.

3. On doit avoir $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sin\widehat{B}} \Leftrightarrow \sin\widehat{B} = \dfrac{1}{2}$.

   On peut en déduire que $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{6}$ et $\widehat{C} = \pi - \widehat{A} - \widehat{B} = \pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$
   (le triangle est en fait rectangle en C)



(a) Dans ACB, $\widehat{C} = 180° - 38° - 36° - 43° = 63°$ et $\dfrac{AC}{\sin 38°} = \dfrac{172}{\sin 63°}$.

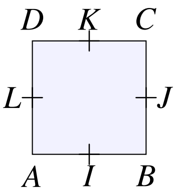
$\Rightarrow AC = \dfrac{172 \times \sin 38°}{\sin 63°} \approx 118,8.$

(b) Dans ADB, $\widehat{D} = 180° - 43° - 38° - 35° = 64°$ et $\dfrac{AD}{\sin 73°} = \dfrac{172}{\sin 64°}$.

$\Rightarrow AD = \dfrac{172 \times \sin 73°}{\sin 64°} \approx 183.$

(c) D'après Théorème d'Al-Kashi dans le triangle ACD,
$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \times AC \times AD \times \cos 36° \approx 12425,7$. On en déduit que $CD \approx 111,5$

Exercice 11 :



On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et I, J, K et L les milieux des côtés.
Associer chacun des produits scalaires avec le calcul ou le résultat auquel il est égal.

— $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BL} = BC\times BJ$.

— $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID} = -IB\times IA$.

— $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{KL} = 0$.

— $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{LK} = AB\times AI$.

Exercice 12 :

$\boxed{1}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\times 6+3\times(-4) = -24$.

$\boxed{2}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}+2\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2+2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

$\boxed{3}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = a(a-2)+2\times 3a = a^2+4a$.

Exercice 13 :

$\boxed{1}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3\times 5+10\times\frac{3}{2} = -15+15 = 0$, donc $\vec{u}\perp\vec{v}$

$\boxed{2}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right) = \left(\sqrt{2}\right)-1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2$
$=2-1+3-4=0$, donc $\vec{u}\perp\vec{v}$

Exercice 14 :

$\boxed{1}$ $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow 3(2-m)+5(-1+m)=0$
$\Leftrightarrow 6-3m-5+5m=0 \Leftrightarrow 2m+1=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

$\boxed{2}$ $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow m(m-3)+m-8=0 \Leftrightarrow m^2-2m-8=0$
$\Delta = 36>0\,;\, m_1 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\times 1} = -2\,;\, m_1 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\times 1} = 4$.
Il faut $m=-2$ ou $m=4$.

Exercice 15 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} = 6\times(-4)+8\times 3 = -24+24 = 0.$

On a bien $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.
$AB = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$ et $AC = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$
aire $= \dfrac{AB\times AC}{2} = \dfrac{10\times 5}{2} = 25$.

Exercice 16 :

$\boxed{1}$ $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4\,;\, \vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 9$.

$\boxed{2}$ $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 2\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}^2 = 8-2+1-9 = -2$.
$(\vec{u}+2\vec{v})^2 = \vec{u}^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{v}^2 = 4+4+36 = 44$.
$(-3\vec{u}+\vec{v})^2 = 9\vec{u}^2-6\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 = 36-6+9 = 39$.

Exercice 17 :

En cours de préparation.

Exercice 18 :

On considère les points $A(1\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(-2\ ;\ -2)$, $D(13\ ;\ -5)$ et $E(4\ ;\ 3)$.

1. (AC) et (AB) ne sont pas perpendiculaires.
2. Même question pour :
   (a) (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
   (b) (BE) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 19 :

1. Si $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0,1$ alors :
   $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 5 \times 2 \times 0,1 = 1.$
2. Si $\|\overrightarrow{u}\| = 23$, $\|\overrightarrow{v}\| = 11$ et $\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0,93$ alors :
   $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 23 \times 11 \times 0,93 = 235,29.$
3. Si $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 8$ et $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$, alors :
   $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}.$$
4. Si $\|\overrightarrow{u}\| = 7$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \dfrac{5\pi}{3}\ (2\pi)$ alors :
   $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 7 \times 2 \times \frac{1}{2} = 7.$$
5. Si $\|\overrightarrow{u}\| = 12$, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ et $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$, alors :
   $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 12 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}.$$
6. Si $\|\overrightarrow{u}\| = 9$, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ et $\overrightarrow{u} = -1,5\overrightarrow{v}$, alors :
   $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\pi) = 9 \times 6 \times (-1) = -54.$

Exercice 20 :

1. Si $\|\overrightarrow{a}\| = \dfrac{5}{6}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ et $\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) = -\dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$, alors
   $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{8} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{15}{96}.$$
2. Si $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 6$ et $\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$, alors :
   $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6.$$
3. Si $\|\overrightarrow{a}\| = 2\sqrt{2}$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \sqrt{8}$ et $\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) = \pi\ (2\pi)$, alors :
   $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos(\pi) = 2\sqrt{2} \times \sqrt{8} \times (-1) = -8.$
4. Si $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{2} + 1$ et $\overrightarrow{b} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{a}$, alors

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos(0) = (\sqrt{2}+1) \times \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{6}+\sqrt{3}.$

Exercice 21 :

On considère un triangle ABC avec $AB = 5$ et $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Exercice 22 :

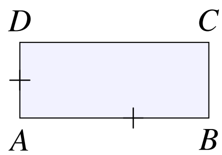
On considère trois points $R(-1\ ;\ -2)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(3\ ;\ 6)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT}$, RS et RT.

   (b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à $0{,}01$ degré près.
2. Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.
3. En déduire $\widehat{STR}$.

Exercice 23 :

On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous, tel que $AB = 5$ et $AD = 2$, E est le milieu de $[AD]$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 3$.



En se plaçant dans un repère orthonormé adapté et à l'aide du produit scalaire, déterminer, à 0,01° près :

1. $\widehat{BAC}$
2. $\widehat{DFB}$
3. $\widehat{DFC}$
4. $\widehat{CEF}$

Exercice 24 :

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{39}{2}$. En effet,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\| + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

   Autrement dit, $100 = 64 + 25 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. D'où le résultat.

2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 45$. En effet,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\| + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \\ &\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{u}\|^2 = 2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \\ &\Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{u}\|^2 = 2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

   Or, $\|\overrightarrow{u}\|^2 = (3\sqrt{5})^2 = 45$. D'où le résultat.

3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 30$. En effet, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 6 + 2 \times 12 = 30$.

$\boxed{4}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -5$. En effet, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\times 5\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5$.

$\boxed{5}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -5$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\| + 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\
&\Leftrightarrow \quad \|-\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|-2\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\
&\Leftrightarrow \quad \|\vec{u}\|^2 = 5\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\
&\Leftrightarrow \quad -4\|\vec{u}\|^2 = 2\vec{u}\cdot\vec{v}. \\
&\Leftrightarrow \quad -2\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{v}.
\end{aligned}$$

Or, $\|\vec{u}\|^2 = 64$. D'où le résultat.