Suites numériques

Pour commencer

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. Calculer u_4.

Exercice 2 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \sqrt{n-1}$.
Calculer les trois premiers termes de la suite.

Exercice 3 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n-5)^2 + 2$. Calculer u_3.

Exercice 4 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$. Calculer u_1 puis u_2.

Exercice 5 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 6 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n \end{cases}$.

1. Calculer u_1 puis u_2.
2. Écrire u_n en fonction de u_{n-1}.

Exercice 7 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + 2 + \ldots + n$.
Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

Exercice 8 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} \ldots + \dfrac{1}{2^n}$.
Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

Exercice 9 :

Compléter.

1. $3 + 4 + 5 + \ldots + 9 = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots$
2. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots$

Exercice 10 :

Calculer.

$\boxed{1}$ $\sum_{k=0}^{3} k^2$

$\boxed{2}$ $\sum_{k=0}^{3} (-1)^k$

$\boxed{3}$ $\sum_{k=0}^{2} \frac{k}{k+1}$

$\boxed{4}$ $\sum_{k=0}^{2} (2k+1)\times(-1)^k$

Exercice 11 :

Pour chacune des suites ci-dessous :

— u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3. \end{cases}$$

— u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -2u_n. \end{cases}$$

— u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = nu_n + 3. \end{cases}$$

$\boxed{1}$ Calculer u_1, u_2 et u_3.

$\boxed{2}$ Écrire u_n en fonction de u_{n-1}.

$\boxed{3}$ À l'aide de la calculatrice, contrôler les résultats de la question **1**.

Exercice 12 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n+7$.

$\boxed{1}$ Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

$\boxed{2}$ Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 13 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3^n$.

$\boxed{1}$ Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

$\boxed{2}$ Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 14 :

Dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.

$\boxed{1}$ (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n + 5n - 1$.

$\boxed{2}$ (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+2} = (n+1)\,u_{n+1} + 5$.

Exercice 15 :

Déterminer les cinq premiers termes des suites suivantes.

$\boxed{1}$ $u_n = 2n^2 - n + 1$.

$\boxed{2}$ $w_n = \sqrt{3n+25}$.

$\boxed{3}$ $v_n = \frac{2n+1}{2-3n}$.

$\boxed{4}$ $x_n = 3\left[1+(-1)^n\right] + 2$.

Exercice 16 :

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour montrer la monotonie des suites.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par : $u_n = -32n + 102$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par : $v_n = \sqrt{2n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par : $w_n = 2n - \dfrac{25}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17 :

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{3^n}{4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.
3. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner le sens de variation de cette suite.

Exercice 18 :

Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel par :

$$u_n = 1 - 3n; \qquad v_0 = \frac{4}{9} \text{ et } v_{n+1} = \frac{3v_n}{2}; \qquad w_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

1. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n					
v_n	$\frac{4}{9}$				
w_n					

2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante.
4. On veut démontrer que la suite (w_n) est décroissante à partir du rang 3.
   (a) Étudier le signe de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $w_{n+1} - w_n = \dfrac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$.
   (c) En déduire que si $n \geqslant 3$ alors $w_{n+1} \leq w_n$ et conclure.

Exercice 19 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2 En utilisant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 20 :

Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1 $u_n = n^2 - 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -3u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6 $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7 $u_n = \dfrac{2^n}{3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8 $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9 $u_n = \dfrac{3n-2}{2-5n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10 $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11 $u_n = (n-5)^2, \ n \geqslant 5$.

12 $u_n = 2n^2 - 3n - 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 :

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 + \dfrac{1}{2}, \quad u_2 = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}, \quad u_3 = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$, et ainsi de suite.

1 Calculer les valeurs exactes de : u_1, u_2 et u_3.

2 Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

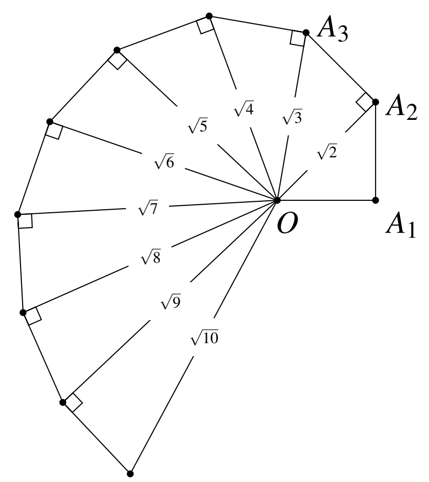
3 En utilisant la calculatrice, compléter le tableau suivant, on donnera les valeurs à 10^{-4} :

n	5	10	20	30	50
u_n					

4 Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 22 :

On considère OA_1A_2 un triangle rectangle en A_1 tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$.
On construit ensuite une suite de points A_n, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que OA_nA_{n+1} soit un triangle rectangle en A_n et que $A_nA_{n+1} = 1$.
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = OA_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.



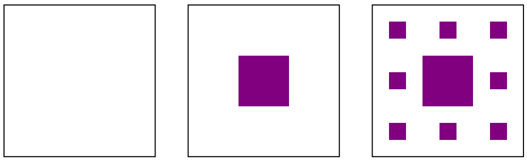
1 Calculer u_2 et u_3.

2 Définir la suite (u_n) par récurrence.

3 Conjecturer la forme explicite de la suite (u_n).

Exercice 23 :

Tapis de Sierpinski : Un carré de 1 m^2 est divisé en neuf carrés égaux comme sur la figure ci-dessous. On colorie le carré central. Les huit carrés restants sont à leur tour divisés en neuf carrés égaux, puis colorie les huits carrés centraux, comme indiqué sur la figure de l'étape 2. On continue ainsi à diviser puis à colorier le carré. Pour tout entier naturel n, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface coloriée à l'étape n.



Étape 0 Étape 1 Étape 2

1. Calculer A_0, A_1, A_2.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.

Exercice 24 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{2}. \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. (a) Dans un repère orthonormal (unité graphique 1 cm), tracer, sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.
   (b) Construire graphiquement les cinq termes de la suite (u_n).
   (c) Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n) (limite et sens de variation).

Exercice 25 :

Pour les suites suivantes, trouver la fonction f associée à la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer les termes de u_1 et u_2.

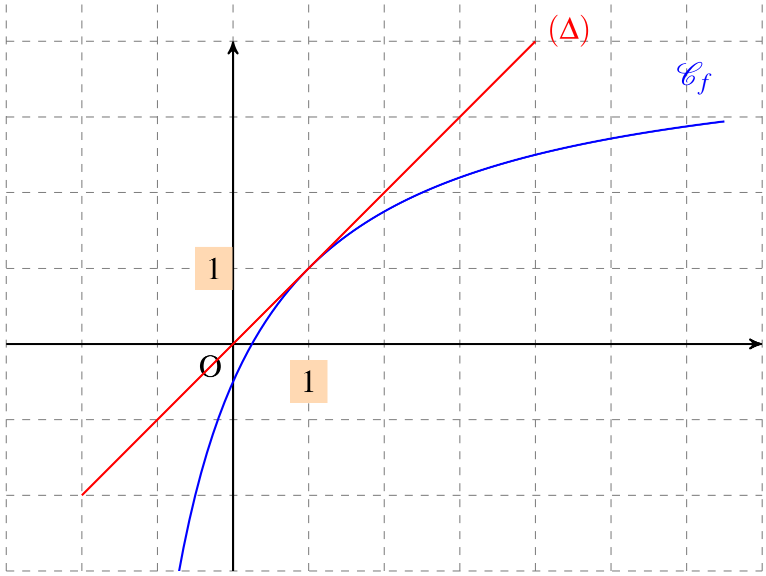
1. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2. \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}. \end{cases}$

Exercice 26 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}. \end{cases}$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x + 2}$, alors on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$



1 Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

2 Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 27 :

On donne la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2. \end{cases}$$

On admet que la suite (u_n) est strictement croissante pour tout entier naturel n.

1 En utilisant la calculatrice, déterminer la valeur de u_{10}.

2 En utilisant la calculatrice, déterminer à partir de quel rang cette suite dépasse-t-elle la valeur 1 000 ?

Exercice 28 :

On donne la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{3}. \end{cases}$$

On admet que la suite (u_n) est strictement décroissante pour tout entier naturel n.

1 En utilisant la calculatrice, déterminer la valeur de u_5.

2 En utilisant la calculatrice, déterminer à partir de quel rang cette suite devient inférieure à 0,51 ?

Exercice 29 :

On donne la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -3 + 2u_n. \end{cases}$$

En utilisant la calculatrice, déterminer le rang à partir duquel tous les termes de la suite décroissante (u_n) dépassent la valeur $-8\,000$.