1re Spé Maths
Entraînement

Suites numériques

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

$u_4 = \dfrac{2\times 4+1}{4+1} = \dfrac{9}{5}$.

Exercice 2 :

$u_1 = \sqrt{1-1} = 0$; $u_2 = \sqrt{2-1} = 1$; $u_3 = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$.

Exercice 3 :

$u_3 = (3-5)^2 + 2 = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$.

Exercice 4 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$.

$u_1 = 2u_0 - 4 = 2\times 3 - 4 = 2$.
$u_2 = 2u_1 - 4 = 2\times 2 - 4 = 0$.

Exercice 5 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$.

$u_1 = \dfrac{1}{u_0} + 1 = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$.
$u_2 = \dfrac{1}{u_1} + 1 = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} + 1 = \dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{7}{4}$.
$u_3 = \dfrac{1}{u_2} + 1 = \dfrac{1}{\frac{7}{4}} + 1 = \dfrac{4}{7} + 1 = \dfrac{11}{7}$.

Exercice 6 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n \end{cases}$.

1. $u_1 = (0+1)\times u_0 = 1\times 2 = 2$.
   $u_2 = (1+1)\times u_1 = 2\times 2 = 4$.

2. $u_n = u_{(n-1)+1} = (n-1+1)u_{n-1} = nu_{n-1}$.

Exercice 7 :

u est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1+2+\ldots+n$.
$u_1 = 1$.
$u_2 = 1+2 = 3$.
$u_3 = 1+2+3 = 6$.
$u_4 = 1+2+3+4 = 10$.

Exercice 8 :

u est la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^n}$.

$u_0 = \frac{1}{2^0} = 1$.

$u_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$u_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

$u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$.

Exercice 9 :

1. $3 + 4 + 5 + \dots + 9 = \sum_{k=3}^{9} k$.

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{2^k}$.

Exercice 10 :

1. $\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14$.

2. $\sum_{k=0}^{3} (-1)^k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$.

3. $\sum_{k=0}^{2} \frac{k}{k+1} = \frac{0}{0+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$.

4. $\sum_{k=0}^{2} (2k+1) \times (-1)^k = (2 \times 0 + 1) \times (-1)^0 + (2 \times 1 + 1) \times (-1)^1 + (2 \times 2 + 1) \times (-1)^2 = 1 - 3 + 5 = 3$.

Exercice 11 :

— u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3. \end{cases}$$

— u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -2u_n. \end{cases}$$

— u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = nu_n + 3. \end{cases}$$

1. (a) $u_1 = \frac{1}{2} \times (-2) + 3 = -1 + 3 = 2$.

   $u_2 = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 4$.

   $u_3 = 4 \times \frac{1}{2} + 3 = 5$.

   (b) $u_1 = -2u_0 = -2 \times 2 = -4$.

   $u_2 = -2u_1 = 2 \times -4 = 8$.

   $u_3 = -2u_2 = -2 \times 8 = -16$.

(c) $u_1 = 0u_0 + 3 = 3.$
$u_2 = 1u_1 + 3 = 1 \times 3 + 3 = 6.$
$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 6 + 3 = 15.$

2 (a) $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3.$

(b) $u_n = -2u_{n-1}.$

(c) $u_n = (n-1)u_{n-1} + 3.$

Exercice 12 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 7$.

1 $u_{n+1} = -2(n+1) + 7 = -2n + 5.$

2 $u_{n+1} = -2n + 7 - 2 = u_n - 2.$

Exercice 13 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3^n$.

1 $u_{n+1} = -3^{n+1}.$

2 $u_{n+1} = -3 \times 3^n = 3u_n.$

Exercice 14 :

1 $u_n = 3u_{n-1} + 5(n-1) - 1 = 3u_{n-1} + 5n - 6.$

2 $u_n = (n-1)u_{n-1} + 5.$

Exercice 15 :

Les cinq premiers termes d'une suite.

1 $u_n = 2n^2 - n + 1.$
$u_0 = 2 \times 0^2 - 0 + 1 = 1.$
$u_1 = 2 \times 1^2 - 1 + 1 = 2.$
$u_2 = 2 \times 2^2 - 2 + 1 = 7.$
$u_3 = 2 \times 3^2 - 3 + 1 = 16.$
$u_4 = 2 \times 4^2 - 4 + 1 = 29.$
$u_5 = 2 \times 5^2 - 5 + 1 = 46.$

2 $w_n = \sqrt{3n + 25}.$
$w_0 = \sqrt{3 \times 0 + 25} = \sqrt{25} = 5.$
$w_1 = \sqrt{3 \times 1 + 25} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$
$w_2 = \sqrt{3 \times 2 + 25} = \sqrt{31}.$
$w_3 = \sqrt{3 \times 3 + 25} = \sqrt{34}.$
$w_4 = \sqrt{3 \times 4 + 25} = \sqrt{37}.$
$w_5 = \sqrt{3 \times 5 + 25} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

3 $v_n = \frac{2n+1}{2-3n}.$
$v_0 = \frac{2 \times 0 + 1}{2 - 3 \times 0} = \frac{1}{2}.$
$v_1 = \frac{2 \times 1 + 1}{2 - 3 \times 1} = \frac{3}{-1} = -3.$
$v_2 = \frac{2 \times 2 + 1}{2 - 3 \times 2} = \frac{5}{-4}.$
$v_3 = \frac{2 \times 3 + 1}{2 - 3 \times 3} = \frac{7}{-7} = -1.$
$v_4 = \frac{2 \times 4 + 1}{2 - 3 \times 4} = \frac{9}{-10}.$
$v_5 = \frac{2 \times 5 + 1}{2 - 3 \times 5} = \frac{11}{-13}.$

4 $x_n = 3[1 + (-1)^n] + 2.$
$x_0 = 3\left[1 + (-1)^0\right] + 2 = 8.$
$x_1 = 3\left[1 + (-1)^1\right] + 2 = 2.$
$x_2 = 3\left[1 + (-1)^2\right] + 2 = 8.$
$x_3 = 3\left[1 + (-1)^3\right] + 2 = 2.$
$x_4 = 3\left[1 + (-1)^4\right] + 2 = 8.$
$x_5 = 3\left[1 + (-1)^5\right] + 2 = 2.$

Exercice 16 :

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour montrer la monotonie des suites.

$\boxed{1}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par : $u_n = -32n+102$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= -32(n+1)+102-(-32n+102) \\ &= -\cancel{32n}-32+\cancel{102}+\cancel{32n}-\cancel{102} \\ &= -32. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n < 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

$\boxed{2}$ Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par : $v_n = \sqrt{2n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \sqrt{2(n+1)-1}-\sqrt{2n-1} \\ &= \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1} \\ &= \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\times\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}^2-\sqrt{2n-1}^2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{\cancel{2n}+1-\cancel{2n}+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{2n+1} > 0$ et $\sqrt{2n-1} > 0$. Donc, $v_{n+1}-v_n > 0$. Autrement dit, la suite (v_n) est strictement croissante.

$\boxed{3}$ Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par : $w_n = 2n-\dfrac{25}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} w_{n+1}-w_n &= 2(n+1)-\frac{25}{n+1}-\left(2n-\frac{25}{n}\right) \\ &= \cancel{2n}+2-\frac{25}{n+1}-\cancel{2n}+\frac{25}{n} \\ &= 2-\frac{25}{n+1}+\frac{25}{n} \\ &= 2-\frac{25n}{n(n+1)}+\frac{25(n+1)}{n(n+1)} \\ &= 2+\frac{-25n}{n(n+1)}+\frac{25n+25}{n(n+1)} \\ &= 2+\frac{25}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n(n+1) > 0$. Donc, $w_{n+1}-w_n > 0$. Autrement dit, la suite (w_n) est strictement croissante.

Exercice 17 :

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

$\boxed{1}$ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{3^n}{4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{3^{n+1}}{4}}{\frac{3^n}{4}} \\
&= \frac{3^{n+1}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{3^n} \\
&= \frac{3 \times \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et par conséquent $u_{n+1} > u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

$\boxed{2}$ On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{n+1}{2^{n+2}}}{\frac{n}{2^{n+1}}} \\
&= \frac{n+1}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{n} \\
&= \frac{n+1}{n} \times \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} \\
&= \frac{n+1}{n} \times \frac{\cancel{2^{n+1}}}{\cancel{2^{n+1}} \times 2} \\
&= \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n > 1$, $2n > n+1$. Donc, $\dfrac{n+1}{2n} < 1$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$. Par ailleurs, pour tout $n > 1$, $v_n > 0$. Par conséquent, $v_{n+1} < v_n$. Autrement dit, (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

$\boxed{3}$ On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n < 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ et $w_{n+1} > w_n$. Autrement dit, la suite (w_n) est strictement croissante.

Exercice 18 :

Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel par :

$$u_n = 1 - 3n; \qquad v_0 = \frac{4}{9} \text{ et } v_{n+1} = \frac{3v_n}{2}; \qquad w_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

1 Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	-2	-5	-8	-11
v_n	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
w_n	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{8}$	1

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - 3(n+1) - (1 - 3n) \\ &= 1 - 3n - 3 - 1 + 3n \\ &= -3 < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{2} > 1.$$

Autrement dit, $v_{n+1} > v_n$. Ainsi, la suite (v_n) est strictement croissante.

4 (a) Le discriminant de la fonction polynôme de degré 2, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$.
Δ étant positif, ce trinôme admet deux racines : $x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{-2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{-2} = 1 - \sqrt{2}$.
f est du signe opposé du coefficient principal entre les deux racines et du signe du coefficient principal ailleurs. Ainsi,

x	0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}} - \frac{2n^2}{2^{n+1}} \\ &= \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

(c) Pour tout entier naturel n, $2^{n+1} > 0$. Donc, le signe de $w_{n+1} - w_n$ est le même que celui de $f(n) = -n^2 + 2n + 1$.
Or, d'après la question 4(a), pour tout $n > 1 + \sqrt{2} > 2$, $f(n) < 0$. Donc, pour tout $n \geqslant 3$ alors $w_{n+1} \leq w_n$. Autrement dit, la suite (w_n) est décroissante à partir du rang 3.

Exercice 19 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 En utilisant la calculatrice, on obtient :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	-1	-3	-13	-183

$\boxed{2}$ Par définition, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 - 1$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_n^2 - 1 < 0$. Donc, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 20 :

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - \left(n^2 - 3n + 1\right) \\
&= n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 1 - n^2 + 3n - 1 \\
&= \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{3n} - 3 + 1 - \cancel{n^2} + \cancel{3n} - 1 \\
&= 2n - 2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

$\boxed{2}$ Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 + 3$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n^2 + 3 > 0$. Donc, la suite (u_n) est croissante.

$\boxed{3}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{5} < 1$. Ainsi, si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} < u_n$.
Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

$\boxed{4}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -n$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n \leqslant 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante.

$\boxed{5}$ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -3u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes consécutifs u_n et u_{n+1} sont de signes opposés. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas monotone.

$\boxed{6}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\dfrac{3^{n+2}}{5^{n+1}}}{\dfrac{3^{n+1}}{5^n}} \\
&= \frac{3^{n+2}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3^{n+1}} \\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Donc, $u_{n+1} < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

$\boxed{7}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\dfrac{2^{n+1}}{3}}{\dfrac{2^n}{3}} \\
&= \frac{2^{n+1}}{3} \times \frac{3}{2^n} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Donc, $u_{n+1} > u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n+2} - 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-1}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2) > 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n < 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)-2}{2-5(n+1)} - \frac{3n-2}{2-5n} \\ &= \frac{3n+1}{-5n-3} - \frac{3n-2}{2-5n} \\ &= \frac{(3n+1)(2-5n)}{(-5n-3)(2-5n)} - \frac{(3n-2)(-5n-3)}{(2-5n)(-5n-3)} \\ &= \frac{6n-15n^2+2-5n}{(-5n-3)(2-5n)} - \frac{-15n^2-9n+10n+6}{(2-5n)(-5n-3)} \\ &= \frac{n-15n^2+2+15n^2-n-6}{(-5n-3)(2-5n)} \\ &= \frac{4}{(5n+3)(2-5n)}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $5n+3$ et $2-5n < 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n < 0$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang $n = 1$.

10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} \\ &= \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\ &= \frac{\cancel{2^{3n}} \times 2^3}{\cancel{3^{2n}} \times 3^2} \times \frac{\cancel{3^{2n}}}{\cancel{2^{3n}}} \\ &= \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement décroissante.

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (n+1-5)^2-(n-5)^2 \\ &= (n-4)^2-(n-5)^2 \\ &= (n-4-n+5)(n-4+n-5) \\ &= 2n-9. \end{aligned}$$

Par ailleurs, le signe de la fonction $x \longrightarrow 2x-9$, donné par la tableau suivant :

x	0		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$2x-9$		$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $n > \frac{9}{2}$, $u_{n+1}-u_n > 0$. Autrement dit, pour tout $n \geqslant 5$, $u_{n+1} > u_n$.
Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 5.

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 2(n+1)^2-3(n+1)-2-\left(2n^2-3n-2\right) \\ &= 2(n^2+2n+1)-3n-3-2-2n^2+3n+2 \\ &= 2n^2+4n+2-3n-3-2-2n^2+3n+2 \\ &= 4n-1. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $4n-1>0$. Donc, $u_{n+1}-u_n>0$, à partir du rang 1. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante, à partir du rang 1.

Exercice 21 :

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :
$u_0 = 2$, $\quad u_1 = 1+\frac{1}{2}$, $u_2 = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$, $u_3 = 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$, et ainsi de suite.

1 Les trois premiers termes :
$u_1 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;
$u_2 = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1+\dfrac{1}{\frac{3}{2}} = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$;
$u_3 = 1+\dfrac{1}{u_2} = 1+\frac{3}{5} = \frac{8}{3}$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :$u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{u_n}$.

3 En utilisant la calculatrice, on obtient :

n	5	10	20	30	50
$u_n \approx$	1,6154	1,6181	1,618	1,618	1,618

4 Selon la question précédente, la limite de la suite (u_n) est : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) \approx 1,618$.

Exercice 22 :

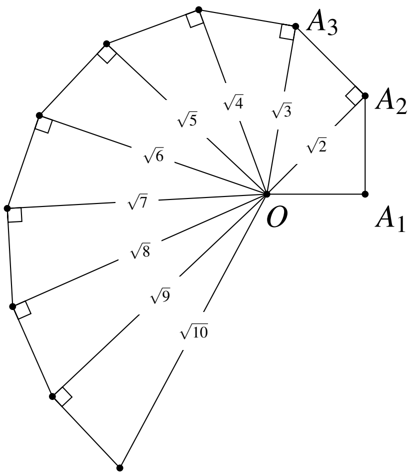
On considère OA_1A_2 un triangle rectangle en A_1 tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$.
On construit ensuite une suite de points A_n, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que OA_nA_{n+1} soit un triangle rectangle en A_n et que $A_nA_{n+1} = 1$.
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = OA_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :
$u_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$;
$u_3 = \sqrt{\sqrt{2}^2+1^2} = \sqrt{3}$.

2. La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

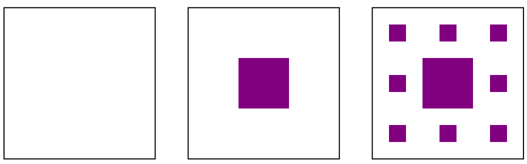
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1} \end{cases}.$$

3. Conjecture : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$.



Exercice 23 :

Tapis de Sierpinski : Un carré de 1 m^2 est divisé en neuf carrés égaux comme sur la figure ci-dessous. On colorie le carré central. Les huit carrés restants sont à leur tour divisés en neuf carrés égaux, puis colorie les huits carrés centraux, comme indiqué sur la figure de l'étape 2. On continue ainsi à diviser puis à colorier le carré. Pour tout entier naturel n, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface coloriée à l'étape n.



Étape 0 Étape 1 Étape 2

1. $A_0 = 0$.
$A_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
$A_2 = 8 \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{17}{81}$.

2. On remarque qu'à chaque étape, on colorie $\frac{1}{9}$ de la partie non coloriée ainsi, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A_{n+1} = \frac{1}{9}(1-A_n) + A_n = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.

Exercice 24 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

$\boxed{1}$ Les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

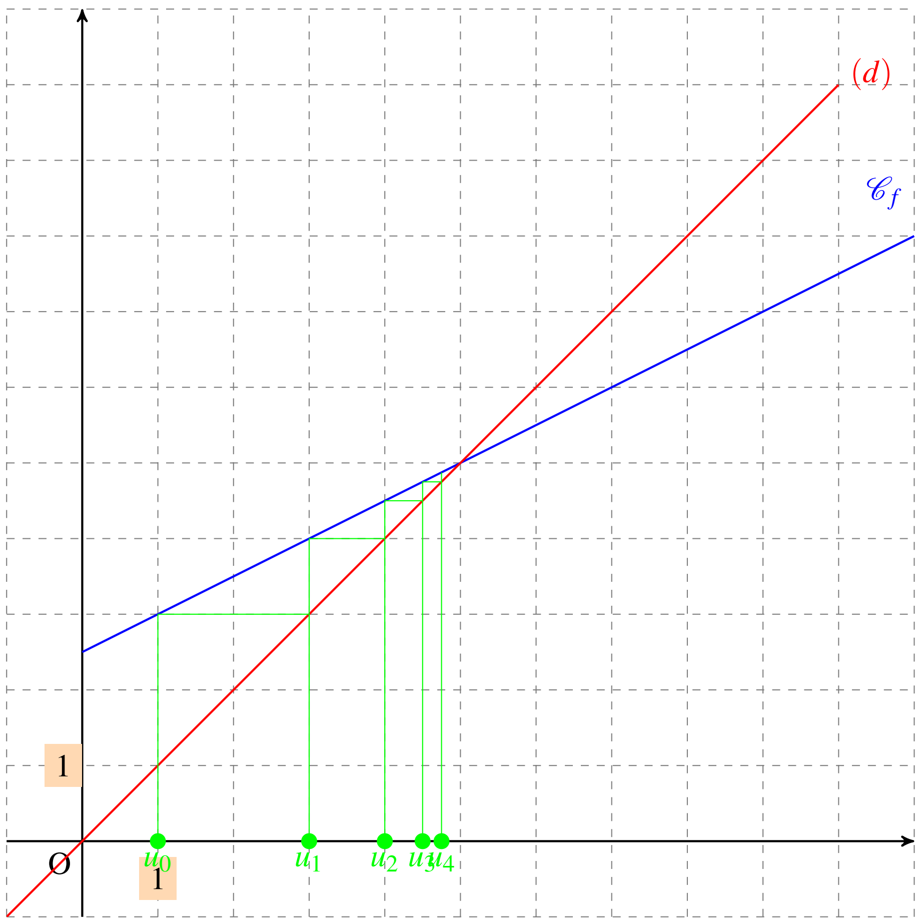
$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.$

$u_4 = \frac{1}{2}u_3 + \frac{5}{2} = \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \frac{19}{4}.$

$u_5 = \frac{1}{2}u_4 + \frac{5}{2} = \frac{19}{8} + \frac{5}{2} = \frac{39}{8}.$

$\boxed{2}$ (a) Dans un repère orthonormal, vous trouverez ci-après, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$, ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.



(b) Voir la figure ci-dessus.

(c) Conjecture : Selon la représentation graphique la suite (u_n) semble croître et tendre vers 5.

Exercice 25 :

Pour les suites suivantes, trouver la fonction f associée à la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer les termes de u_1 et u_2.

1. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1}. \end{cases}$

Dans ce cas, la fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

$u_1 = \dfrac{2u_0}{u_0+1} = \dfrac{2\times 5}{5+1} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$.

$u_2 = \dfrac{2u_1}{u_1+1} = \dfrac{2\times\dfrac{5}{3}}{\dfrac{5}{3}+1} = \dfrac{10}{3}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n-1}{u_n}. \end{cases}$

Dans ce cas, la fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

$u_1 = \dfrac{u_0-1}{u_0} = \dfrac{2-1}{1} = 1$ et $u_2 = \dfrac{u_1-1}{u_1} = \dfrac{1-1}{1} = 0$

3. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n+1)^2. \end{cases}$

Dans ce cas, la fonction f est définie par : $f(x) = (x+1)^2$.

$u_1 = (u_0+1)^2 = (-1+1)^2 = 0$ et $u_2 = (u_1+1)^2 = (0+1)^2 = 1$.

4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}. \end{cases}$

Dans ce cas, la fonction f est définie par : $f(x) = \sqrt{x+1}$.

$u_1 = \sqrt{u_0+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{u_1+1} = \sqrt{\sqrt{2}+1}$.

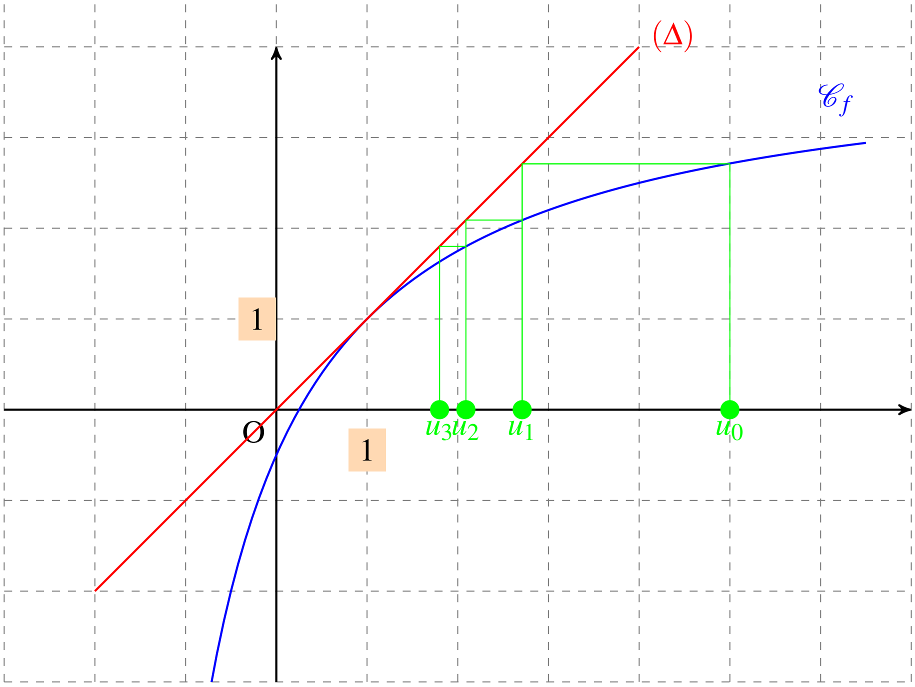
Exercice 26 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n-1}{u_n+2}. \end{cases}$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$



1 Voir la figure.

2 Conjecture : La suite (u_n) semble décroitre et tendre vers 1.

Exercice 27 :

On donne la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2. \end{cases}$$

On admet que la suite (u_n) est strictement croissante pour tout entier naturel n.

1 En utilisant la calculatrice, on obtient : $u_{10} = 59\ 048$.

2 En utilisant la calculatrice, on constate qu'à partir du rang 7 cette suite dépasse la valeur 1 000.

Exercice 28 :

On donne la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{3}. \end{cases}$$

On admet que la suite (u_n) est strictement décroissante pour tout entier naturel n.

1 En utilisant la calculatrice, on obtient : $u_5 = 0,5185$.

2 En utilisant la calculatrice, on constate qu'à partir du rang 6, cette suite devient inférieure à 0,51.

Exercice 29 :

On donne la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -3 + 2u_n. \end{cases}$$

En utilisant la calculatrice, on constate qu'à partir du rang 11, les termes de la suite décroissante (u_n) dépassent la valeur $-8\,000$.