# Suites numériques

## Algorithmique

Évarite Galois
maths-mde.fr

### Exercice 1 :

La suite $(v_n)$ est définie par $v_0 = 16$ et pour tout entier naturel $n$ par : $v_{n+1} = \sqrt{v_n} + 5$.

1. Calculer $v_1$ et $v_2$.

2. Compléter l'algorithme en langage naturel ci-après qui permet de calculer le rang $n$ de la suite $(v_n)$.

```
V ⟵ .......
Pour i allant de 1 à N
V ⟵.......
Fin Pour
```

### Exercice 2 :

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 45$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.

2. Voici deux propositions d'algorithmes :

```
U ⟵ 150
N ⟵ 0
Tant que U ⩾ 220
U ⟵ 0,8 × U + 45
N ⟵ N+1
Fin Tant que
```

```
U ⟵ 150
N ⟵ 0
Tant que U < 220
U ⟵ 0,8 × U + 45
N ⟵ N+1
Fin Tant que
```

On s'intéresse, à la fin de son exécution, à la valeur de la variable N de l'algorithme.

(a) Un seul de ces algorithmes permet d'affecter à la variable N, en fin d'exécution, le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n \geqslant 220$.
Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

(b) Quelle est la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet l'algorithme ?

### Exercice 3 :

On considère l'algorithme suivant :

```
a ⟵ 2
Pour i allant de 0 à 5
a ⟵ a × 2
Fin Pour
```

1. Lors de son exécution pas à pas, indiquer les différentes valeurs prises par la variable a.

2. Parmi les expressions choisies qu'elle(s) peuvent être l'expression d'une suite $(u_n)$ afin que ses six premiers termes soient les valeurs prises par la variable a lors de l'exécution de l'algorithme précédent :

(a) $u_n = 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(b) $u_n = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(c) $u_n = 2^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(d) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

## Exercice 4 :

On considère l'algorithme suivant :

```
a ⟵ −1
Pour i allant de 0 à 4
a ⟵ a× 2 - i + 1
Fin Pour
```

1. Donner les différentes valeurs prises par la variable a lors d'une exécution pas à pas de cet algorithme.
2. Donner l'expression d'une suite $(u_n)$ dont les cinq premiers termes sont les différentes valeurs prises par la variable a lors de l'exécution de cet algorithme.

## Exercice 5 :

On considère la suite $(u_n)$ définie sous Python par :

```python
def terme_u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=5*u-1
    return u
```

1. Donner les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)$.

## Exercice 6 :

On considère la suite arithmétique $(u_n)$ dont le terme de rang $n$ s'obtient sous Python par :

```python
def suite(n):
    u=10
    for k in range(1,n+1):
        u=u+4
    return(u)
```

1. Préciser le premier terme $u_0$ et la raison.
2. En déduire la formule explicite de $u_n$.
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n \geqslant 1000$.
4. Compléter le programme Python suivant pour répondre à la question précédente.

```
n=0
u=...
while ..........:
      n=n+1
      u=u+4
print('n=',n)
```

### Exercice 7 :

On considère la suite $(u_n)$ définie sous Python par :

```
from math import*
def listesuite(n):
    u=1
    L=[u]
    for i in range(1,n+1):
        u=sqrt(2*u)
        L.append(u)
    return L
```

1. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)$.
2. Que permet de retourner le susdit programme sous Python ?
3. Émettre une conjecture sur la limite de la suite $(u_n)$.

### Exercice 8 :

On doit à Fibonacci, mathématicien italien du XIII$^e$ siècle le problème suivant. « Un homme met un couple de lapins dans un lieu clos. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? » On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ comme le nombre de couples présents le n-ième mois.
On pose $u_0 = 0$, on a donc $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Compléter le programme Python ci-dessous pour retourner la liste des termes de la suite de $u_0$ à $u_n$.

```
def fibonacci(n):
    a=0;b=1;L=[a]
    for i in range(1,n+1):
        c=.....
        a=..
        b=...
        L.append(a)
    return(L)
```

2. Déterminer à l'aide de ce programme fibonacci(12).
3. Que représente fibonacci(12) dans le contexte du problème posé par Fibonacci ?

### Exercice 9 :

1. On considère la suite $(v_n)$ définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$ pour tout entier naturel $n$.
   (a) Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ? En préciser les éléments caractéristiques.
   (b) Donner, pour tout entier naturel $n$, une expression de $v_n$ en fonction de $n$.
   (c) Calculer la somme $S$ des dix premiers termes de la suite $(v_n)$.

**2** On modélise une suite $(w_n)$ sous Python.

```python
def terme(n):
    w=4
    for i in range(n):
        w=2*w-3
    return w
```

(a) Que renvoie l'exécution de terme(5) ?

(b) Compléter la fonction Sommetermes(n), écrite en langage Python, pour renvoyer la somme des $n$ premiers termes.

```python
def Sommetermes(n):
    w=4
    S=...
    for i in range(1,n):
        w=2*w-3
        S=....
    return ....
```

## Exercice 10 :

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5. \end{cases}$

Soit la suite $(t_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $t_n = u_n - 5$.

**1** Montrer que la suite $(t_n)$ est géométrique.

**2** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 9 \times 2^2 + 5$.

**3** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \cdots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7)$.

## Exercice 11 :

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 euros.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.
On note $(u_n)$ la suite des primes avec $u_1 = 500$.

**1** Calculer $u_2$ puis $u_3$, c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année.

**2** Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. En déduire la nature de la suite $(u_n)$.

**3** Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.

(a) Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année.

(b) Calculer la somme totale $S$ des primes touchées sur les 20 années.