1re Spé Maths
Entraînement

Trigonométrie

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

x (rad)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
x (deg)	36	60	72	144	180	240

Exercice 2 :

x (deg)	30	45	75	90	135	150
x (rad)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Exercice 3 :

1. Les mesures principales de 15π, -3π, -6π, 28π et $-\pi$ sont respectivement π, π, 0, 0 et π.
2. Les mesures principales de $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{2}$ et $\frac{26\pi}{2}$ sont respectivement $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 et π.

Exercice 4 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$.

1. $(\vec{v},\vec{u}) = -\frac{\pi}{4}$.
2. $(\vec{u},-\vec{v}) = \frac{5\pi}{4}$.
3. $(-\vec{u},-\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$.
4. $(\vec{v},-\vec{u}) = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 5 :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ et $\vec{t}$ des vecteurs non nuls.

1. $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})$
2. $(\vec{v},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{t}) = (\vec{v},\vec{t})$
3. $(\vec{t},\vec{w}) + (\vec{v},\vec{t}) = (\vec{v},\vec{w})$

Exercice 6 :

1. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.
2. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.
3. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

Exercice 7 :

Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

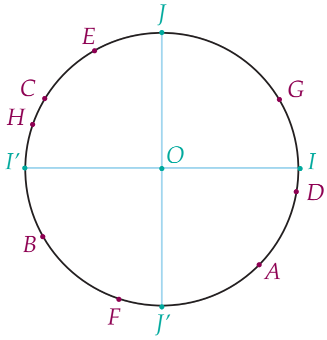
1. $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DC}\right) = \frac{2\pi}{3}$.
2. $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{2\pi}{3}$.
3. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right) = \frac{5\pi}{3}$.
4. $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 8 :

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 9 :

Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



1. $A : -\frac{\pi}{4}$ $\quad B : -\frac{5\pi}{6}$ $\quad C : \frac{5\pi}{6}$ $\quad D : -\frac{\pi}{18}$ $\quad E : \frac{2\pi}{3}$ $\quad F : -\frac{6\pi}{10}$ $\quad G : \frac{\pi}{6}$ $\quad H : \frac{9\pi}{10}$.

2. $A : -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ $\quad B : -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$ $\quad C : \frac{5\pi}{6}$ $\quad D : -\frac{\pi}{18} + 2\pi = \frac{35\pi}{18}$ $\quad E : \frac{2\pi}{3}$
   $F : -\frac{6\pi}{10} + 2\pi = \frac{14\pi}{10} = \frac{7\pi}{5}$ $\quad G : \frac{\pi}{6}$ $\quad H : \frac{9\pi}{10}$.

Exercice 10 :

1. $-\frac{7\pi}{5} \notin]-\pi\ ;\ \pi]$. Par ailleurs, $-\frac{7\pi}{5} = \frac{-10\pi + 3\pi}{5} = -2\pi + \frac{3\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5} \in]-\pi\ ;\ \pi]$.
   Ainsi, $\frac{3\pi}{5}$ est la mesure principale.

2. $\frac{18\pi}{4} \notin]-\pi\ ;\ \pi]$. Par ailleurs, $\frac{18\pi}{4} = \frac{16\pi + 2\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \in]-\pi\ ;\ \pi]$.
   Ainsi, $\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale.

3. $\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi\ ;\ \pi]$. Par ailleurs, $\frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi - 2\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3} \in]-\pi\ ;\ \pi]$.
   Ainsi, $\frac{-2\pi}{3}$ est la mesure principale.

4. $\frac{7\pi}{10} \in]-\pi\ ;\ \pi]$, donc $\frac{7\pi}{10}$ est la mesure principale.

Exercice 11 :

Trouver l'angle x dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ correspondant à l'angle α donné :

1. $\alpha = \frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle qui appartient à $]-\pi\ ;\ \pi]$ et qui correspond à α.

2. $\alpha = -\frac{4\pi}{3} = \frac{-6\pi + 2\pi}{3} = -2\pi + \frac{2\pi}{3}$. Ainsi, $\frac{2\pi}{3}$ est l'angle qui appartient à $]-\pi\ ;\ \pi]$ et qui correspond à α.

3 $\alpha = \dfrac{35\pi}{6} = \dfrac{36\pi - \pi}{6} = 6\pi - \dfrac{\pi}{6}$. Ainsi, $-\dfrac{\pi}{6}$ est l'angle qui appartient à $]-\pi\ ;\ \pi]$ et qui correspond à α.

4 $\alpha = -\dfrac{21\pi}{4} = \dfrac{-24\pi + 3\pi}{4} = -6\pi + \dfrac{3\pi}{4}$. Ainsi, $\dfrac{3\pi}{4}$ est l'angle qui appartient à $]-\pi\ ;\ \pi]$ et qui correspond à α.

5 $\dfrac{202\pi}{3} = \dfrac{204\pi - 2\pi}{3} = 68\pi - \dfrac{2\pi}{3}$. Ainsi, $-\dfrac{2\pi}{3}$ est l'angle qui appartient à $]-\pi\ ;\ \pi]$ et qui correspond à α.

Exercice 12 :

Soit n un entier naturel.

1 $\cos(2n\pi) = 1$ et $\sin(2n\pi) = 0$.

2 $\cos((2n+1)\pi) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$ et $\sin((2n+1)\pi) = 0$.

3 $\cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si n est pair} \\ -1 & \text{si n est impair} \end{cases}$ et $\sin(n\pi) = 0$.

4 $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$,
et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 13 :

1 $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

2 $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

3 $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

4 $\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

5 $\cos\left(\dfrac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 14 :

1 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2 $\cos\left(\dfrac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3 $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4 $\cos\left(\dfrac{81\pi}{4}\right) = \cos\left(20\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{81\pi}{4}\right) = \sin\left(10\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5 $\cos\left(\dfrac{108\pi}{4}\right) = \cos(27\pi) = \cos(26\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$ et $\sin\left(\dfrac{108\pi}{4}\right) = \sin(27\pi) = 0$.

6 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7 $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8 $\cos\left(\frac{71\pi}{3}\right)=\cos\left(24\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{71\pi}{3}\right)=\sin\left(24\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9 $\cos\left(\frac{79\pi}{3}\right)=\cos\left(26\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{79\pi}{3}\right)=\sin\left(26\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10 $\cos\left(-\frac{54\pi}{3}\right)=\cos(-18\pi)=1$ et $\sin\left(-\frac{54\pi}{3}\right)=\sin(-18\pi)=0$.

Exercice 15 :

1 On sait que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi,
$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2 On sait que : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi,
$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 On déduit alors que,
$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 16 :

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont nulles quel que soit x réel ?

1 $\cos(x+\pi)-\cos(-x)=-2\cos x$.

2 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)=0$.

3 $\sin(2\pi-x)+\sin(\pi+x)=-2\sin x$.

4 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(4\pi+x)=2\sin x$.

Exercice 17 :

1 $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

2 $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 18 :

L'équation $\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$, admet deux solutions sur $]-\pi\,;\,\pi]$: $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$ et $\alpha_2=-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 19 :

Sur $[0\ ;\ 2\pi[$, l'inéquation $\cos(\alpha) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, admet pour ensemble de solutions $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{7\pi}{4}\right]$.

Exercice 20 :

L'équation $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, admet deux solutions sur $[0\ ;\ 2\pi[$: $\alpha_1 = \frac{4\pi}{3}$ et $\alpha_2 = \frac{5\pi}{3}$.

Exercice 21 :

Sur $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'inéquation $\sin(\alpha) < \frac{1}{2}$ admet pour ensemble de solutions $\left]-\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$.

Exercice 22 :

Sur $]-\pi\ ;\ \pi]$,

— l'inéquation $\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour ensemble de solutions : $S_1 = \left]-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$;

— et, l'inéquation $\sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$ admet pour ensemble de solutions : $S_2 = \left]-\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$.

Ainsi, sur $]-\pi\ ;\ \pi]$, le système d'inéquations, $\begin{cases} \cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ admet pour ensemble de solutions :

$S = S_1 \cap S_2 = \left]-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$.

Exercice 23 :

Sur $]-\pi\ ;\ \pi]$,

— l'inéquation $\cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ admet pour ensemble de solutions : $S_1 = \left]-\pi\ ;\ -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$;

— et, l'inéquation $\sin(x) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour ensemble de solutions : $S_2 = \left]-\frac{2\pi}{3}\ ;\ -\frac{\pi}{3}\right]$.

Ainsi, sur $]-\pi\ ;\ \pi]$, le système d'inéquations, $\begin{cases} \cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ admet pour ensemble de solutions :

$S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Exercice 24 :

Sur $[0\ ;\ 2\pi[$,

— l'inéquation $\cos(x) \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions : $S_1 = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right[$;

— et, l'inéquation $\sin(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour ensemble de solutions : $S_2 = \left[-0\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right[$.

Ainsi, sur $[0\ ;\ 2\pi[$, le système d'inéquations, $\begin{cases} \cos(x) \geqslant 0 \\ \sin(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ admet pour ensemble de solutions :