1re Spé Maths
Entraînement

Variable aléatoire

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de passages à l'infirmerie dans un lycée dans une journée.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,35	0,3	0,25	$\cdots$

1 Si ce tableau définit bien une loi de probabilité, alors :

$$\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1 \Leftrightarrow P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_2) + P(X = x_4) = 1.$$

Autrement dit, $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} P(X = 3) & = & 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\ & = & 1 - (0,35 + 0,3 + 0,25) \\ & = & 1 - 0,9 \\ & = & 0,1. \end{array}$$

2 La probabilité qu'il y ait au moins deux passages à l'infirmerie dans la journée est égale à :

$$\begin{array}{rcl} P(\{X = 2\} \cup \{X = 3\}) & = & P(X \geqslant 2) \\ & = & P(X = 2) + P(X = 3) \\ & = & 0,1 + 0,25 \\ & = & 0,35. \end{array}$$

Exercice 2 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,02	0,12	a	0,31	0,27

1 Ce tableau définit une loi de probabilité, alors :

$$\sum_{i=1}^{5} P(X = x_i) = 1 \Leftrightarrow P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_2) + P(X = x_4) + P(X = x_5) = 1.$$

Autrement dit, $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} P(X = 2) & = & 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4)) \\ a & = & 1 - (0,02 + 0,12 + 0,31 + 0,27) \\ & = & 1 - 0,72 \\ & = & 0,28. \end{array}$$

2 Calculons $P(X \geqslant 2)$ et $P(X > 0)$.

$$\begin{array}{rcl} P(X \geqslant 2) & = & P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 3) \\ & = & 0,28 + 0,31 + 0,27 \\ & = & 0,86. \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - 0,02 \\ &= 0,98. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	p	$2p$	$3p$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 &\Leftrightarrow p + 2p + 3p = 1 \\ &\Leftrightarrow 6p = 1 \\ &\Leftrightarrow p = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains devant peser normalement 500 g. On note X la variable aléatoire donnant les masses possibles des pains en grammes. On donne la loi de probabilité de X.

x_i	480	490	500	510	520
$P(X = x_i)$	0,08	0,29	0,41	0,12	0,1

1. La probabilité qu'un pain pèse au moins 500 g, est égale à :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 500) &= P(X = 500) + P(X = 510) + P(X = 520) \\ &= 0,41 + 0,12 + 0,1 \\ &= 0,63. \end{aligned}$$

2. Seuls les pains pesant au moins 490 g vont être commercialisés. La probabilité qu'un pain soit commercialisé est égale à :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 490) &= 1 - P(X < 490) \\ &= 1 - P(X = 480) \\ &= 1 - 0,08 \\ &= 0,92. \end{aligned}$$

Exercice 5 :

1. Une variable aléatoire prend chacune des valeurs 0 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives $0,21$; $0,16$

et $0,63$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \times P(X = x_i) \\ &= x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) \\ &= 0 \times 0,21 + 1 \times 0,16 + 2 \times 0,63 \\ &= 0,16 + 1,26 \\ &= 1,42. \end{aligned}$$

2 Une variable aléatoire prend chacune des valeurs -2 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \times P(X = x_i) \\ &= x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) \\ &= -2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{6} + 1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 6 :

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,25	0,4	0,2	0,05

1 Ce tableau définit bel et bien une loi de probabilité, car :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} p_i &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \\ &= 0,1 + 0,25 + 0,4 + 0,2 + 0,05 \\ &= 1. \end{aligned}$$

2 Calculons $P(X \geqslant 0)$ puis $P(X < 1)$.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 0) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0,4 + 0,2 + 0,05 \\ &= 0,65. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X < 1) &= P(X = 0) + P(X = -1) + P(X = -2) \\ &= 0,4 + 0,25 + 0,1 \\ &= 0,75. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{5} x_i \times P(X=x_i)\\
&= x_1 \times P(X=x_1)+x_2 \times P(X=x_2)+x_3 \times P(X=x_3)+x_4 \times P(X=x_4)+x_5 \times P(X=x_5)\\
&= -2\times 0,1+(-1)\times 0,25+0\times 0,4+1\times 0,2+2\times 0,05\\
&= -0,45+0,3\\
&= -0,15.
\end{aligned}$$

Exercice 7 :

Le nombre de clients passant à la caisse d'un supermarché en 10 min est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité ci-dessous.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

Calculons $E(X)$. On a par définition,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i \times P(X=x_i)\\
&= x_1 \times P(X=x_1)+x_2 \times P(X=x_2)+x_3 \times P(X=x_3)+x_4 \times P(X=x_4)\\
&= 0\times 0,2+1\times 0,3+2\times 0,4+3\times 0,1\\
&= 1,4.
\end{aligned}$$

Ainsi, le caissier peut espérer faire passer en moyenne 1,4 clients en 10 minutes, soit 8,4 clients en une heure, en moyenne.

Exercice 8 :

On donne la ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui représente le gain (positif ou négatif) associé à un jeu.

x_i	-4	-3	0	2	5
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Calculons $E(X)$. On a par définition,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{5} x_i \times P(X=x_i)\\
&= x_1 \times P(X=x_1)+x_2 \times P(X=x_2)+x_3 \times P(X=x_3)+x_4 \times P(X=x_4)+x_5 \times P(X=x_5)\\
&= -4\times\frac{1}{16}+(-3)\times\frac{3}{16}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{16}+5\times\frac{1}{16}\\
&= \frac{-4-9+6+5}{16}\\
&= \frac{-2}{16}\\
&= \frac{-1}{8}.
\end{aligned}$$

$E(X)\neq 0$, donc le jeu n'est pas équitable.
De plus, $E(X)<0$, donc le jeu est défavorable aux joueurs.

Exercice 9 :

On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-7	3	a
p_i	0,3	0,5	0,2

Calculons $E(X)$. On a par définition,

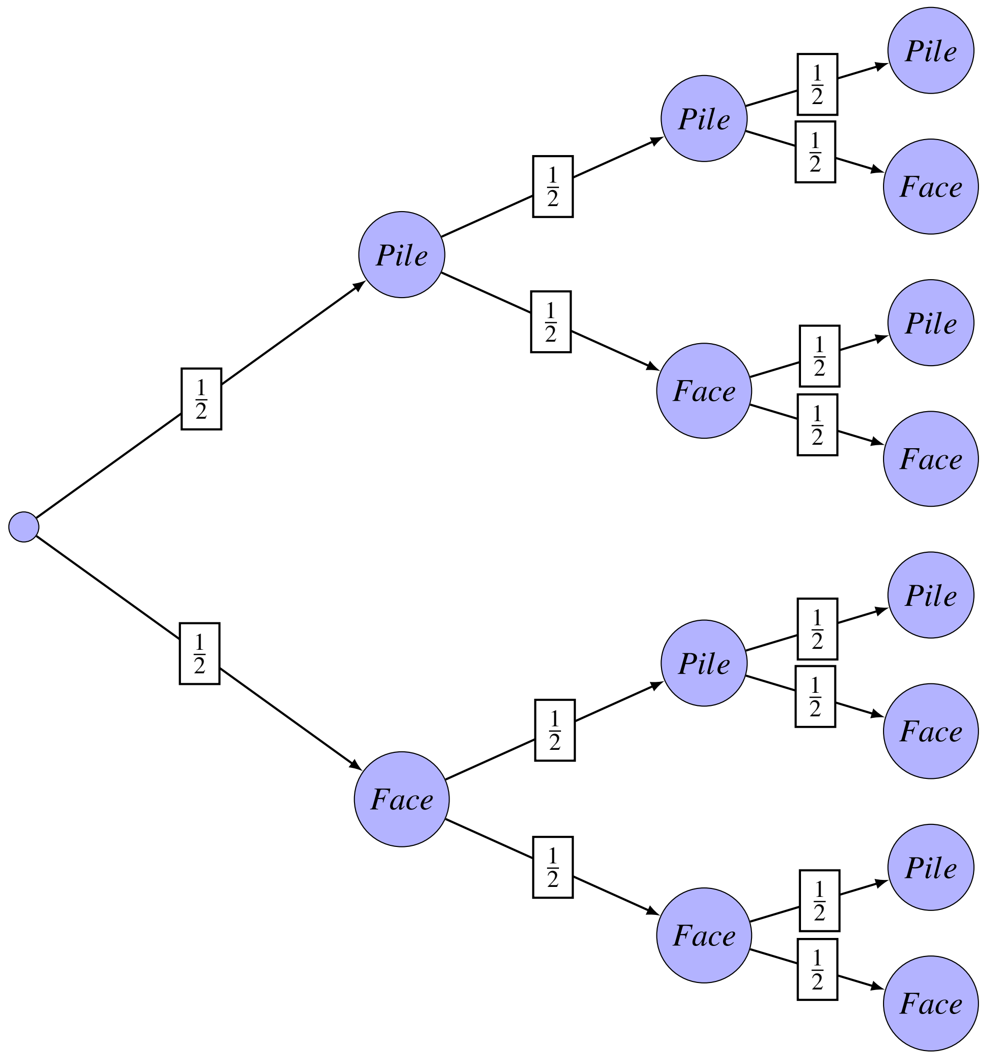
$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \times P(X = x_i) \\
&= x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) \\
&= -7 \times 0,3 + 3 \times 0,5 + a \times 0,2 \\
1,2 &= -0,6 + 0,2a.
\end{aligned}$$

Ainsi, $a = \dfrac{1,2+0,6}{0,2} = 9$.

Exercice 10 :

On considère un jeu de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Une partie consiste à lancer successivement trois fois la pièce. On note P la sortie de PILE et F la sortie de FACE.

$\boxed{1}$ Voici l'arbre de probabilité,



Notons : Pile = p et Face = f. L'ensemble des issues possibles sont : ppp ; ppf ; pfp ; pff ; fpp ; fpf ; ffp et fff.

2 Chaque PILE obtenu fait gagner 2 € mais chaque FACE fait perdre 3 €. De plus, si les trois lancers de la partie donnent un résultat identique, le joueur reçoit en plus un bonus de 2 €.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain réalisé.

(a) $X \in \{-7;-4;1;8\}$. ?

(b) La loi de probabilité de X est donner par le tableau ci-après :

x_i	-7	-4	1	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calculons $E(X)$. On a par définition,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i \times P(X=x_i) \\ &= x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + x_3 \times P(X=x_3) + x_4 \times P(X=x_4) \\ &= -7 \times \frac{1}{8} + (-4) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 8 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{-7-12+3+8}{8} \\ &= -1. \end{aligned}$$

(c) Soit p le bonus p qu'il faut donner au joueur pour que le jeu soit équitable. Autrement dit,

$$\begin{aligned} & E(X) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{4} x_i \times P(X=x_i) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 \times P(X=x_1) + x_2 \times P(X=x_2) + x_3 \times P(X=x_3) + x_4 \times P(X=x_4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (-9+p) \times \frac{1}{8} + (-4) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + (6+p) \times \frac{1}{8} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-9+p-12+3+6+p}{8} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-12+2p}{8} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p = 6. \end{aligned}$$

Ainsi,lorsque $p=6$, le jeu est équitable.