2

Dérivation

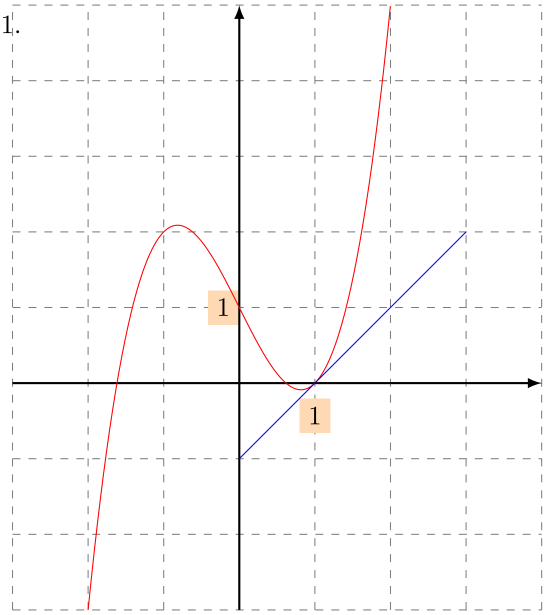
Série d'exercices

Corrigés — **Classe : 1re SPE** — **Lycée : Evariste Galois**

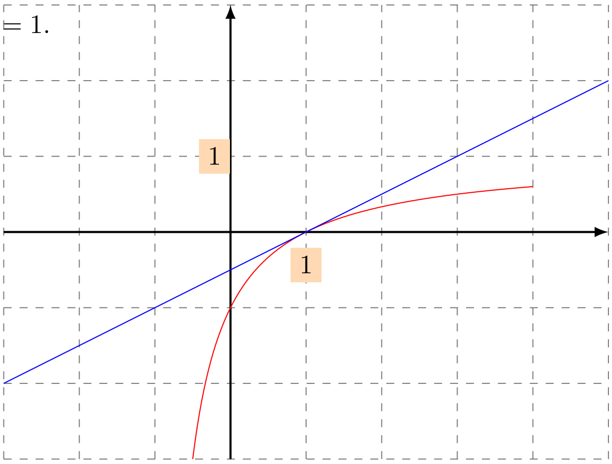
Exercice n°1

Pour chacune des questions suivantes, on donne la représentation graphique d'une fonction f (en rouge) et la tangente à cette représentation au point d'abscisse a.
Déterminer graphiquement $f'(a)$, puis écrire l'équation réduite de la tangente tracée.

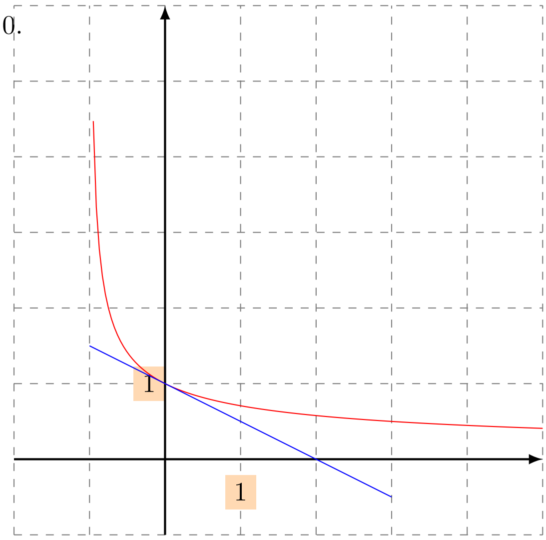
1. $a = 1$.



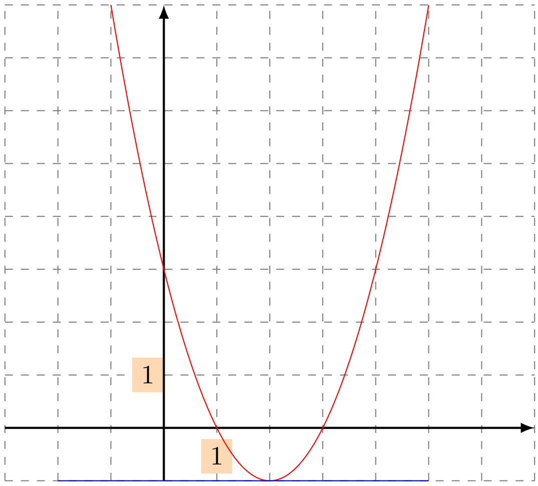
2. $a = 1$.



3. $a = 0$.



4. $a = 2$.

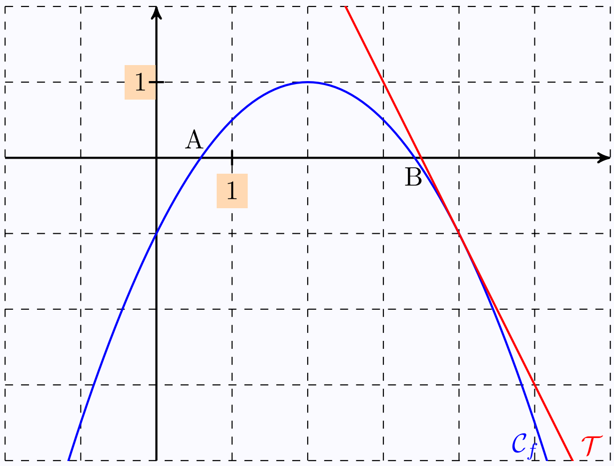


Exercice n°2

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(a)$ puis trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$, $a = 2$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$.
3. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $a = -1$.
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$.

Exercice n°3



La courbe ci-dessus représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. Lire graphiquement les valeurs : $f(0)$; $f(2)$; $f'(2)$; $f(4)$; $f'(4)$.
2. Déterminer les valeurs de a, b et c à l'aide des valeurs trouvées précédemment.
3. Déterminer les abscisses des points A et B.

Exercice n°4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

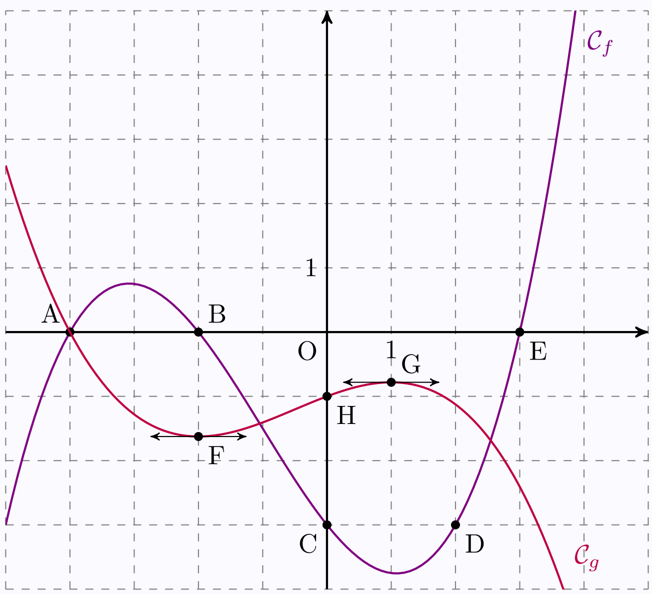
où a, b, c et d sont quatre nombres réels.
On sait que :

— le point $A(1; -1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$;
— la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A a pour équation : $y = -2x + 1$;
— $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 ;
— $f'(0) = -5$.

Déterminer les valeurs de a, b, c et d à l'aide de ces informations.

Exercice n°5

On considère les fonctions f et g dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



On sait que :

— les fonctions f et g sont des polynômes de degré 3 ;
— $\mathcal{C}_f$ passe par les points A, B, C, D et E ;
— $\mathcal{C}_g$ passe par les points A et H ;
— les tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisse -2 et 1 sont horizontales.

1. À l'aide des informations ci-dessous, déterminer l'expression factorisée de $f(x)$.
2. À l'aide des informations ci-dessous, déterminer une expression de $g(x)$.
3. Trouver les abscisses des points d'intersection des deux courbes par le calcul.

Exercice n°6

Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 3x - 1$
2. $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$
3. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
5. $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x}$
6. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{1}{3}\sqrt{x}$

Exercice n°7

Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 2x\sqrt{x}$;
2. $f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+5}$;
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x}{x^2+1}$;
4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x-3}$;
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + \dfrac{1}{x}}$.

Exercice n°8

Pour chacune des fonctions f et g,

— trouver son domaine de définition ;
— trouver sa dérivée ;
— trouver son sens de variations sur son domaine de définition ;
— donner le signe de la fonction sur son domaine de définition.

1. $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}$.
2. $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

Exercice n°9

Pour chacune des fonctions suivantes,

— donner son domaine de définition ;
— trouver sa dérivée ;
— en déduire ses variations sur son domaine de définition.

1. $f(x) = \dfrac{3x-4}{5x-2}$.
2. $g(x) = \dfrac{5x-3}{x^2 - x - 2}$.
3. $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$.

Exercice n°10

L'entreprise KIHARNAK fabrique de la poudre de fée dont tout le monde pourrait se passer et qui pourtant a un succès fou.
Son coût de production est donné par la fonction $C(q) = q^3 - 2q^2 + 10q + 150$, où q représente la quantité (en tonne) de poudre.
On définit le *coût unitaire*, ou *coût moyen*, par la fonction $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

On rappelle que le coût marginal est la fonction définie par : $C_m(q) = C'(q)$.
Dans cet exercice, il ne faudra pas hésiter à prendre des initiatives en s'aidant éventuellement de la calculatrice ou d'un quelconque autre instrument informatique.

1. Donner l'expression de $CM(q)$, puis celle de $C_m(q)$.
2. Étudier les variations de CM, puis donner la quantité q pour laquelle le coût moyen est minimal. Quel est alors ce coût ?
3. Résoudre l'équation $CM(q) = C_m(q)$. Que peut-on constater ?

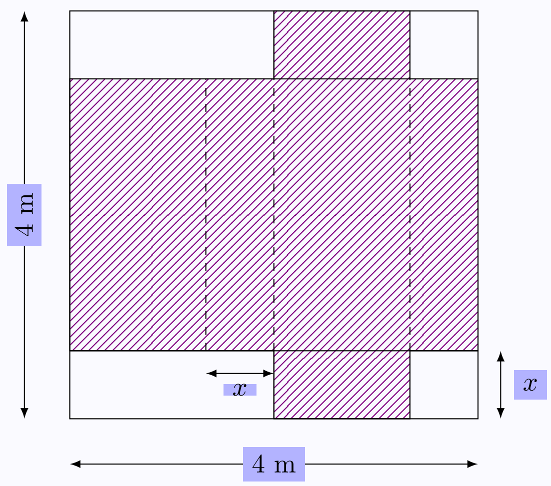
Exercice n°11

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1. Montrer que la dérivée de la fonction f est donnée par : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}(3-x^2)}{2(x^2+1)^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$, puis en déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice n°12

On souhaite construire une boîte parallélépipédique à partir d'un carton carré de 4 mètres de côté, comme l'illustre le schéma suivant :



La partie hachurée correspond à la partie du carton qui va être pliée (aux pointillés) pour obtenir la boîte.

1. Montrer que le volume de la boîte est égal à $f(x) = 2x(2-x)^2$.
2. Étudier les variations de f, puis en déduire la valeur de x (arrondie au centimètre près) pour laquelle le volume de la boîte est optimal.

Exercice n°13

Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production.

Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, ...) et d'autre part, les coûts variables (salaires, ingrédients, ...) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.
On estime que la fonction de coût total de cette entreprise (exprimé en dizaine d'euros) pour une journée est donnée par la fonction :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20.$$

On suppose que cette entreprise ne peut pas fabriquer plus de 800 pizzas par jour.
Cette entreprise vend une pizza 7,50 €. On note B la fonction qui donne le bénéfice quotidien de l'entreprise en fonction de q lots fabriqués et vendus.

1. Étudier les variations de C sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$.
2. Exprimer en fonction de q le bénéfice $B(q)$ de cette entreprise (en dizaine d'euros).
3. Étudier les variations de B sur $[0\ ;\ 20]$.
   En déduire le nombre de lots de pizzas qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice ?

Exercice n°14

Un artisan fabrique de la confiture qu'il vend à un grossiste. Le coût de fabrication quotidien, en euros, de x kilogrammes de confiture est donné par la fonction :

$$C(x) = 0{,}01x^3 - 3{,}4x + 100.$$

Chaque kilogramme de confiture est vendu 14 euros.
Il estime qu'il ne peut pas fabriquer plus de 40 kilogrammes par jour.

1. Exprimer en fonction de x la recette quotidienne $R(x)$ de x kilogrammes de confiture vendus.
2. Montrer que le bénéfice quotidien de l'artisan pour x kilogrammes est donné par la fonction :
$$B(x) = -0{,}01x^3 + 17{,}4x - 100.$$
3. Calculer $B'(x)$.
4. Quelle quantité de confiture doit-il vendre afin d'obtenir un bénéfice maximal ?

Exercice n°15

Georges-Henri a trouvé un grillage long de 28 mètres. Il a alors l'idée de construire un enclos rectangulaire pour ses poules. Il souhaite que cet enclos ait la plus grande aire possible.
Donner les dimensions de cet enclos.