Corrigé

Série d'exercices — Classe : 1re SPE — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Il faut, pour chaque question, regarder la tangente à la courbe tracée en rouge au point d'abscisse a donné.

1. Ici, la tangente a pour coefficient directeur 1. Donc $f'(1) = 1$.
   Ainsi, la tangente tracée a pour équation réduite :
   $$\boxed{y = x - 1}.$$
   N'oublions pas que dans l'équation d'une droite $y = mx + p$, p désigne l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
2. Ici, le coefficient directeur de la tangente tracée est $-\dfrac{1}{2}$. En effet, les points $A(0;1)$ et $B(2;0)$ sont sur la tangente donc :
   $$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}.$$
   Ainsi, $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
   L'équation réduite de la tangente sera alors :
   $$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1.}$$
3. Ici, le coefficient directeur de la tangente est $\dfrac{1}{2}$, donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.
   L'équation réduite de la tangente sera alors :
   $$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.}$$
4. Ici, la tangente est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0.
   L'équation de la tangente est alors :
   $$\boxed{y = -1.}$$

Exercice n°2

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(a)$ puis trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$, $a = 2$.
   — Calcul de $f'(2)$.
   Le taux d'accroissement de f en 2 est :
   $$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}\\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h}\\ &= \frac{h(4+h)}{h}\\ &= 4+h.\end{aligned}$$
   Ainsi, le nombre dérivé de f en 2 est :
   $$f'(2) = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$
2. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est alors :
   $$\begin{aligned}y &= f'(a)(x-a) + f(a)\\ y &= f'(2)(x-2) + f(2)\\ y &= 4(x-2) + 4\\ y &= 4x - 8 + 4\\ y &= 4x - 4.\end{aligned}$$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$.
   — Calcul de $f'(1)$.
   Le taux d'accroissement de f en 1 est :
   $$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h}\\ &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h}}{h}\\ &= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h}\\ &= -\frac{h}{h(1+h)}\\ &= -\frac{1}{1+h}.\end{aligned}$$
   Ainsi, le nombre dérivé de f en 1 est :
   $$f'(1) = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{1+h}\right) = -1.$$
   — L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est alors :
   $$\begin{aligned}y &= f'(a)(x-a) + f(a)\\ y &= f'(1)(x-1) + f(1)\\ y &= -1(x-1) + 1\\ y &= -x + 1 + 1\\ y &= -x + 2.\end{aligned}$$
3. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $a = -1$.
   — Calcul de $f'(-1)$.
   Le taux d'accroissement de f en -1 est :
   $$\begin{aligned}&\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\ &= \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - \left((-1)^2 - 2\times(-1) + 3\right)}{h}\\ &= \frac{h^2 - 2h + 1 + 2 - 2h + 3 - 6}{h}\\ &= \frac{h^2 - 4h}{h}\\ &= \frac{h(h-4)}{h}\\ &= h - 4.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en -1 est :

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} (h - 4) = -4.$$

— L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est alors :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\
y &= f'(-1)(x+1) + f(-1) \\
y &= -4(x+1) + 6 \\
y &= -4x - 4 + 6 \\
y &= -4x + 2.
\end{aligned}$$

4. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$.
   — Calcul de $f'(3)$.
   Le taux d'accroissement de f en 4 est :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\
&= \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\
&= \frac{\left(\sqrt{4+h} - 2\right)\left(\sqrt{4+h} + 2\right)}{h} \\
&= \frac{h^2 - 4h}{h\left(\sqrt{4+h} + 2\right)} \\
&= \frac{4 + h - 4}{h\left(\sqrt{4+h} + 2\right)} \\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h} + 2\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.
\end{aligned}$$

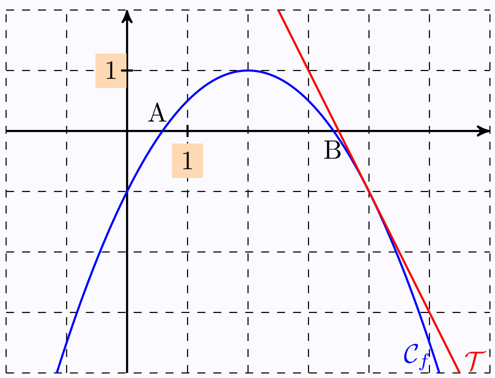
Ainsi, le nombre dérivé de f en 4 est :

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} \right) = \frac{1}{4}.$$

— L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est alors :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\
y &= f'(4)(x-4) + f(4) \\
y &= \frac{1}{4}(x-4) + 2 \\
y &= \frac{1}{4}x - 1 + 2 \\
y &= \frac{1}{4}x + 1.
\end{aligned}$$

Exercice n°3



1. — $f(0) = -1$;
   — $f(2) = 1$;
   — $f'(2) = 0$ car la fonction atteint un maximum pour $x = 2$;
   — $f(4) = -1$;
   — $f'(4) = -2$ (coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4).
2. — $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$; donc $c = -1$ d'après la question précédente (1$^{\text{er}}$ point).
   — $f'(x) = 2ax + b$ et $f'(2) = 4a + b$; donc $4a + b = 0$, soit $b = -4a$.
   — $f(2) = 1$ donc $4a + 2b - 1 = 1$, soit $-b + 2b = 2$ d'après le point précédent. Ainsi, $b = 2$.
   — $f'(4) = 8a + b = -2$ donc $8a = -4$, soit $b = -\dfrac{1}{2}$.

   Finalement, on a : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.
3. L'abscisse des points A et B sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = 4 - 2 = 2.$$

Ainsi,

$$x_B = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_B = \frac{-2 - \sqrt{2}}{-1} \qquad x_A = \frac{-2 + \sqrt{2}}{-1}$$

$$\underline{x_B = 2 + \sqrt{2}}. \qquad \underline{x_A = 2 - \sqrt{2}}.$$

Exercice n°4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où a, b, c et d sont quatre nombres réels.

1. — $A1{-}1 \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = -1$, soit :

$$a + b + c + d = -1 \tag{1}$$

   — la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A a pour équation : $y = -2x + 1$ donc $f'(1) = -2$, soit :

$$3a + 2b + c = -2 \tag{2}$$

   — $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 donc $f(0) = 2$, d'où :

$$d = 2.$$

   — $f'(0) = -5$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ donc :

$$c = -5.$$

Les équations 1 et 2 donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = -1 - (-5) - 2 = 2 \\ 3a + 2b = -2 - (-5) = 3 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a = 2 - b \\ 3(2 - b) + 2b = 3 \end{cases}$$

La seconde équation donne alors :

$$6 - b = 3 \qquad \text{soit :} \qquad b = 3.$$

La première équation donne alors :

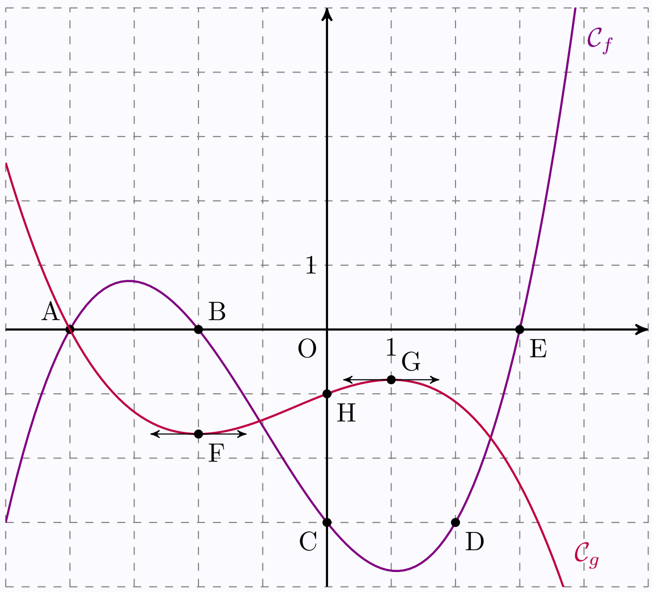
$$a = 2 - 3 = -1.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2.}$$

Exercice n°5

On considère les fonctions f et g dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



On sait que :

— les fonctions f et g sont des polynômes de degré 3 ;
— $\mathcal{C}_f$ passe par les points A, B, C, D et E ;
— $\mathcal{C}_g$ passe par les points A et H ;
— les tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisse -2 et 1 sont horizontales.

1. $f(x) = a(x+4)(x+2)(x-3)$. En effet, f s'annule pour $x = -4$, $x = -2$ et $x = 3$.
   De plus, $f(0) = -3$ donc $a \times 4 \times 2 \times (-3) = -3$, soit $a = \frac{1}{8}$. Ainsi :
   $$f(x) = \frac{1}{8}(x+4)(x+2)(x-3).$$
2. $g(x) = (x+4)(ax^2 + bx + c)$. En effet, $g(-4) = 0$.
   De plus, $g(0) = -1$ donc $4c = -1$, soit $c = -\frac{1}{4}$.
   Ainsi, $g'(x) = ax^2 + bx - \frac{1}{4} + (x+4)(2ax+b)$ (on dérive le produit).
   Or, $g'(-2) = 0$ donc $4a - 2b - \frac{1}{4} + 2(-4a+b) = 0$, soit $-4a = \frac{1}{4}$. Donc $a = -\frac{1}{16}$.
   De plus, $g'(1) = 0$ donc $-\frac{1}{16} + b - \frac{1}{4} + 5\left(-\frac{1}{8} + b\right) = 0$, soit $6b = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$. Donc $c = \frac{5}{32}$. Ainsi :
   $$\boxed{g(x) = (x+4)\left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}\right)}$$
3. L'abscisse d'un point d'intersection des deux courbes vérifie l'équation $f(x) = g(x)$.
   $f(x) = g(x)$
   $\Leftrightarrow \frac{1}{8}(x+4)(x+2)(x-3) = (x+4)\left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}\right)$
   $\Leftrightarrow \frac{1}{8}\left(x^2 - x - 6\right) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}$
   $\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 24 = -2x^2 + 5x - 8$ on a multiplié par 32
   $\Leftrightarrow 6x^2 - 9x - 16 = 0.$
   $$\Delta = 81 - 4 \times 6 \times (-16) = 465.$$
   Les abscisses des deux points d'intersection sont donc :
   $$x_1 = \frac{9 - \sqrt{465}}{12} \quad ; \; x_2 = \frac{9 + \sqrt{465}}{12}.$$

Exercice n°6

1. $f(x) = 3x - 1$ donc $f'(x) = 3$.
2. $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = 10x + 3$.
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = x^2 - 10x + 3$.
4. $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$.
6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$ donc $f'(x) = -x + 3 - \frac{1}{6\sqrt{x}}$.

Exercice n°7

Calcul de la dérivée.

1. $f(x) = 2x\sqrt{x}$. On pose :

$u(x) = 2x$	$v(x) = \sqrt{x}$
$u'(x) = 2$	$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   On a alors :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \\ f'(x) &= 3\sqrt{x}. \end{aligned}$$
2. $f(x) = \frac{3x-1}{4x+5}$. On pose :

$u(x) = 3x - 1$ $\quad$ $v(x) = 4x + 5$

$u'(x) = 3$ $\quad$ $v'(x) = 4$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{3(4x+5) - 4(3x-1)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{12x + 15 - 12x + 4}{(4x+5)^2} \\ f'(x) &= \frac{19}{(4x+5)^2}. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$. On pose :

$u(x) = \sqrt{x} - x$ $\quad$ $v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ $\quad$ $v'(x) = 2x$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \times (x^2+1) - (\sqrt{x} - x) \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} - x^2 - 1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + x^2 - 2x\sqrt{x} - 1}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}}}{\left(x^2+1\right)^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}\left(x^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$. On pose :

$u(x) = x^2 - 3x + 1$ $\quad$ $v(x) = x - 3$

$u'(x) = 2x - 3$ $\quad$ $v'(x) = 1$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{(2x-3)(x-3) - (x^2 - 3x + 1) \times 1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 1}{(x-3)^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}$.

On commence par simplifier l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\frac{x^2+1}{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}. \end{aligned}$$

On pose alors :

$u(x) = x\sqrt{x}$ $\quad$ $v(x) = x^2 + 1$

$v'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2+1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\left(3 - x^2\right)}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Exercice n°8

Pour chacune des fonctions f et g,
- trouver son domaine de définition ;
- trouver sa dérivée ;
- trouver son sens de variations sur son domaine de définition ;
- donner le signe de la fonction sur son domaine de définition.

1. $f(x) = (3x + 2)\sqrt{x}$.
   - Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$.
   - f est de la forme uv avec :

$u(x) = 3x + 2$ $\quad$ $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 3$ $\quad$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 3\sqrt{x} + (3x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3\sqrt{x} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x+3x+2}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

— $f'(x) > 0 \iff 9x + 2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\frac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	

— D'après le tableau de variation de f, on peut dire que $f(x) \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$.

— Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g =]0;+\infty[$.

— g est de la forme uv avec :

$$u(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad v(x) = \sqrt{x}$$
$$u'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -\frac{1}{x^2}\sqrt{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{\sqrt{x}}{x \times \sqrt{x} \times \sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\ g'(x) &= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

— $g'(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$ car $2x\sqrt{x} > 0$ sur $\mathcal{D}_g$.

On a alors le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	2	↗	

— D'après le tableau de variations de g, on peut dire que $g(x) \geqslant 2$ sur $]0;+\infty[$, donc $g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice n°9

Pour chacune des fonctions suivantes,

— donner son domaine de définition ;

— trouver sa dérivée ;

— en déduire ses variations sur son domaine de définition.

1. $f(x) = \frac{3x-4}{5x-2}$.

— $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

— f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 3x - 4 \qquad v(x) = 5x - 2$$
$$u'(x) = 3 \qquad v'(x) = 5$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{3(5x-2) - 5(3x-4)}{(5x-2)^2} \\ &= \frac{15x - 6 - 15x + 20}{(5x-2)^2} \\ f'(x) &= \frac{14}{(5x-2)^2}. \end{aligned}$$

— $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ donc :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

2. $g(x) = \frac{5x-3}{x^2-x-2}$.

— Une racine évidente de $x^2 - x - 2$ est $x_1 = 2$. De plus, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ donc $2x_2 = -2$, soit $x_2 = -1$.

Ainsi, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 2\}$.

— f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 5x - 3 \qquad v(x) = x^2 - x - 2$$
$$u'(x) = 5 \qquad v'(x) = 2x - 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{5(x^2-x-2) - (5x-3)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \\ &= \frac{5x^2 - 5x - 10 - 10x^2 + 5x + 6x - 3}{(x^2-x-2)^2} \\ g'(x) &= \frac{-5x^2 + 6x - 13}{(x^2-x-2)^2}. \end{aligned}$$

— $g'(x)$ est du signe de $-5x^2 + 6x - 13$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 36 - 260 < 0.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$g(x)$		↘	‖	↘	‖	↘	

3. $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$.
   — $x^2 - 3x + 2$ possède $\alpha = 1$ comme racine évidente, donc la seconde racine est $\beta = 2$.
   Ainsi, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1\ ;\ 2\}$.
   — f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

   $u(x) = x^2 + x + 1$ $\qquad$ $v(x) = x^2 - 3x + 2$
   $u'(x) = 2x + 1$ $\qquad$ $v'(x) = 2x - 3$

   D'où :

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}\\
&= \frac{(2x+1)(x^2-3x+2) - (x^2+x+1)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}\\
&= \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + x^2 - 3x + 2 - (2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + 2x - 3)}{(x^2-3x+2)^2}\\
&= \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2 - 2x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2-3x+2)^2}\\
h'(x) &= \frac{-4x^2 + 2x + 5}{(x^2-3x+2)^2}.
\end{aligned}$$

   — $h'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 2x + 5$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 4 + 80 = 84.$$

   Ses deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{84}}{-8} = \frac{-2+2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1-\sqrt{21}}{4} \approx -0{,}9 < \alpha.$$

   Et,

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{84}}{-8} = \frac{-2-2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1+\sqrt{21}}{4} \approx 1{,}4$$

   avec, $x_2 \in\in]\alpha;\beta[=]1;2[$.
   On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		$\alpha=1$		x_2		$\beta=2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	||	$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$	

Exercice n°10

L'entreprise KIHARNAK fabrique de la poudre de fée dont tout le monde pourrait se passer et qui pourtant a un succès fou.
Son coût de production est donné par la fonction $C(q) = q^3 - 2q^2 + 10q + 150$, où q représente la quantité (en tonne) de poudre.
On définit le *coût unitaire*, ou *coût moyen*, par la fonction $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1. $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{q^3 - 2q^2 + 10q + 150}{q} = q^2 - 2q + 10 + \dfrac{150}{q}$.
   $C_m(q) = C'(q) = 3q^2 - 4q + 10$.
2. $CM'(q) = 2q - 2 - \dfrac{150}{q^2} = \dfrac{2q^3 - 2q^2 - 150}{q^2} = \dfrac{2}{q^2}(q^3 - q^2 - 75)$.
   $\dfrac{2}{q^2} > 0$ donc $CM'(q)$ est du signe du polynôme $P(q) = q^3 - q^2 - 75$.
   $P'(q) = 3q^2 - 2q = q(3q-2)$ donc $q = 0$ et $q = \dfrac{2}{3}$ sont les deux racines de P.
   On en déduit le tableau suivant :

q	0		$\frac{2}{3}$		5		$+\infty$
$P'(q)$		$-$	0	$+$			
$P(q)$	-75	$\searrow$	$\approx -75{,}1$	$\nearrow$	25	$\nearrow$	

   Intuitivement, comme il n'y a pas de valeurs interdites entre $\dfrac{1}{3}$ et 5, on peut supposer qu'il existe une valeur de q, notée α, comprise entre $\dfrac{2}{3}$ et 5, telle que $P(\alpha) = 0$.
   Vous verrez l'année prochaine une formulation plus adéquate, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.
   On peut alors dresser le tableau suivant :

q	0		α		$+\infty$
$CM'(q)$	||	$-$	0	$+$	
$CM(q)$	||	$\searrow$		$\nearrow$	

   À la calculatrice, on trouve une valeur approché de α :

$$\alpha \approx 4{,}578.$$

   Le coût moyen de production est donc minimal pour 4578 kg de poudre fabriquée.

   Le coût minimal est alors $CM(\alpha) \approx 54{,}57$ €, ce qui signifie qu'une tonne de poudre (de fée) coûte en moyenne 54,57 € à fabriquer si on en fabrique 4,578 tonnes.
3. Résolvons l'équation $CM(q) = C_m(q)$ à la calculatrice : on trouve $q \approx 4{,}578$.
   On constate que l'on obtient la valeur de q pour laquelle le coût moyen est minimal.

Exercice n°11

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x\sqrt{x}$ et $v(x) = x^2+1$.
   u est une fonction produit gh avec $g(x) = x$ et $h(x) = \sqrt{x}$, donc $u = g'h + h'g$. Ainsi,
$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x}. \end{aligned}$$
   On a alors :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2+1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(x^2+1) - 4x^2\sqrt{x}}{2(x^2+1)^2} \\ f'(x) &= \frac{\sqrt{x}(3-x^2)}{2(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$
2. $2(x^2+1)^2 > 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $3 - x^2$, polynôme de degré 2 qui admet pour racines $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ et dont le coefficient de x^2 est négatif, d'où le tableau de variations.

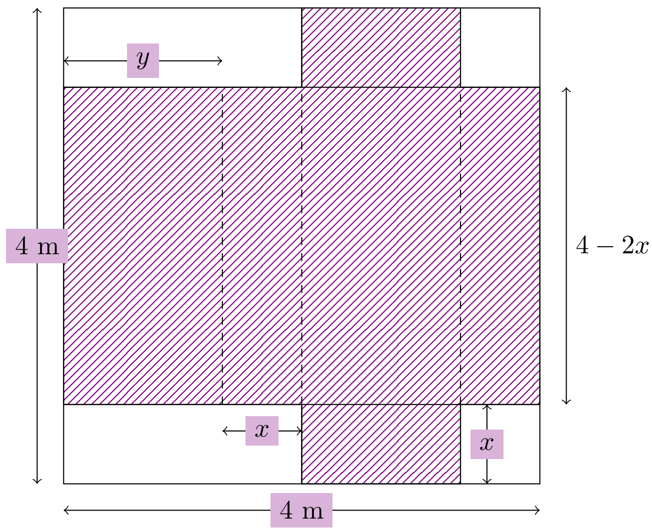
x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

3. L'équation réduite d'une tangente est donnée par la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, avec ici $a = 1$.
   $f(a) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(a) = \dfrac{1}{4}$ donc l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :
$$y = \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$$
   soit $\boxed{y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}.}$

Exercice n°12

On souhaite construire une boîte parallélépipédique à partir d'un carton carré de 4 mètres de côté, comme l'illustre le schéma ci-après.
La partie hachurée correspond à la partie du carton qui va être pliée (aux pointillés) pour obtenir la boîte.

1. Notons y la largeur d'une face de la boîte. Alors,
$$y + x + y + x = 4\ ,$$
   soit :
$$y = 2 - x.$$



   Le volume de la boîte est alors :
$$\begin{aligned} f(x) &= x \times (4-2x) \times y \\ f(x) &= 2x(2-x)^2. \end{aligned}$$
2. $f(x) = 2x(4 - 4x + x^2) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$.
   Ainsi, $f'(x) = 6x^2 - 16x + 8$, dont le discriminant est $\Delta = 16^2 - 4 \times 6 \times 8 = 64$. $f'(x)$ admet donc deux racines : $\alpha = \dfrac{16-\sqrt{64}}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ et $\beta = \dfrac{16+8}{12} = 2$. On a alors :

x	0		$\frac{2}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f		$\nearrow$		$\searrow$	

   Notons que x ne peut pas dépasser la valeur 2 car il faut que $4 - 2x \geqslant 0$, soit $2x \leqslant 4$, d'où $x \leqslant 2$.
   Le maximum de f est atteint en $x = \dfrac{2}{3}$ (exprimé en mètre).

Exercice n°13

Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production.

1. $C(q) = \dfrac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$. donc $C'(q) = \dfrac{3}{2}q^2 - 4q + 5$.
   Le discriminant de $C'(q)$ est :
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 5 = 16 - 30 = -14 < 0.$$
   Par conséquent, $C'(q) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0\ ;\ 20]$. Ainsi, C est strictement croissante sur $[0\ ;\ 20]$.

2. Une pizza est vendue 7,50 € et il y a 4 dizaines de pizzas dans un lot donc la recette (exprimée en dizaine d'euros) est :
$$R(q) = 4 \times 7{,}5q = 30q.$$
Ainsi, le bénéfice est :
$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 30q - \frac{1}{2}q^3 + 2q^2 - 5q - 20 \\ B(q) &= -\frac{1}{2}q^3 + 2q^2 + 25q - 20. \end{aligned}$$

3. $B'(q) = -\dfrac{3}{2}q^2 + 4q + 25$. Le discriminant de $B'(q)$ est :
$$\Delta = 16 + 150 = 166.$$
Les racines sont donc :
$$q_1 = \frac{-4-\sqrt{166}}{-3} \approx 5{,}63$$
et
$$q_2 = \frac{-4+\sqrt{166}}{-3} < 0.$$
On a alors le tableau suivant :

x	0		q_1		20
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$		↗		↘	

Le bénéfice maximal est donc atteint pour $q = 5$ ou $q = 6$ lots de 40 pizzas. Le bénéfice (en dizaine d'euros) est alors :
$$B(5) = -\frac{1}{2} \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 25 \times 5 - 20 = 92{,}5.$$
$$B(6) = -\frac{1}{2} \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 25 \times 6 - 20 = 94.$$
Le bénéfice maximum est donc atteint pour 6 lots de 40 pizzas fabriqués, et est égal à 94 €.

Exercice n°14

Un artisan fabrique de la confiture qu'il vend à un grossiste. Le coût de fabrication quotidien, en euros, de x kilogrammes de confiture est donné par la fonction :
$$C(x) = 0{,}01x^3 - 3{,}4x + 100.$$
Chaque kilogramme de confiture est vendu 14 euros.
Il estime qu'il ne peut pas fabriquer plus de 40 kilogrammes par jour.

1. La recette quotidienne s'obtient en multipliant la quantité de confiture vendue (en kilogramme) par le prix unitaire (soit 14 €). Ainsi,
$$\boxed{R(x) = 14x.}$$

2. Le bénéfice quotidien de l'artisan pour x kilogrammes est donné par la fonction :
$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 14x - (0{,}01x^3 - 3{,}4x + 100) \\ &= -0{,}01x^3 + 14x + 3{,}4x - 100 \\ B(x) &= -0{,}01x^3 + 17{,}4x - 100. \end{aligned}$$

3. La dérivée de $B(x)$ est :
$$\begin{aligned} B'(x) &= -0{,}01 \times 3x^2 + 17{,}4 \times 1 - 0 \\ B'(x) &= -0{,}03x^2 + 17{,}4. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} B'(x) = 0 &\iff -0{,}03x^2 + 17{,}4 = 0 \\ &\iff -0{,}03x^2 = -17{,}4 \\ &\iff x^2 = \frac{17{,}4}{0{,}03} = 580 \\ &\iff x = \sqrt{580} \text{ sur } 040 \end{aligned}$$
D'où le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{580}$		40
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		↗		↘	

Le bénéfice est donc maximal pour $\sqrt{580} \approx 24$ kilogrammes de confiture vendus.

Exercice n°15

Georges-Henri a trouvé un grillage long de 28 mètres. Il a alors l'idée de construire un enclos rectangulaire pour ses poules. Il souhaite que cet enclos ait la plus grande aire possible.
Appelons x la longueur du rectangle (de l'enclos) ; alors, $\dfrac{28-2x}{2} = 14 - x$ est la largeur.
Ainsi, l'aire de l'enclos est $f(x) = x(14-x) = -x^2 + 14x$.
f est une fonction polynôme de degré 2 dont les branches sont dirigées vers le bas (car le coefficient de x^2 est négatif) donc f admet un maximum pour $x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{14}{-2} = 7$.
Ainsi, la longueur de l'enclos doit être égale à 7 mètres et sa largeur, à $14 - 7 = 7$ mètres. L'enclos doit donc être carré pour optimiser son aire.