7

Probabilités conditionnelles

Série d'exercices

Corrigés — Classe : 1re Spé — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6% sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98% des lecteurs MP3 défectueux et 5% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

— D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
— R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

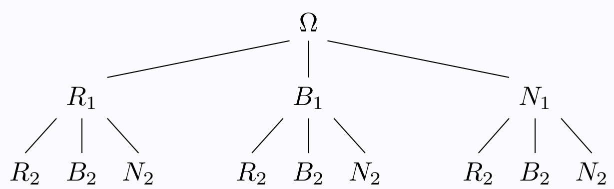
1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. (a) Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
   (b) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
   Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.

Exercice n°2

Une urne, notée U_1, contient k boules rouges, $k+1$ boules blanches et 2 boules noires, où k est un entier naturel non nul.
Une urne, notée U_2, contient 3 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule noire.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Une *expérience* consiste à tirer au hasard une boule de U_1, à la mettre dans U_2, puis à tirer une boule de U_2.
Pour $i=1$ et $i=2$, on note :

— R_i l'événement : « On tire une boule rouge de l'urne U_i. »
— B_i l'événement : « On tire une boule blanche de l'urne U_i. »
— N_i l'événement : « On tire une boule noire de l'urne U_i. »
— D l'événement : « On tire deux boules de couleurs différentes lors de l'expérience. »

1. Compléter l'arbre des probabilités de l'expérience ci-dessous.
2. Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D)=\dfrac{k+2}{2k+3}$.



Exercice n°3

Dans une école, il y a 3 classes C_1, C_2, C_3 dont le nombre d'élèves est respectivement 44, 33, 40. Chaque classe a une probabilité de gagner à un jeu respectivement de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.
Si un élève gagne, quelle est la probabilité qu'il vienne de la classe C_2 ?

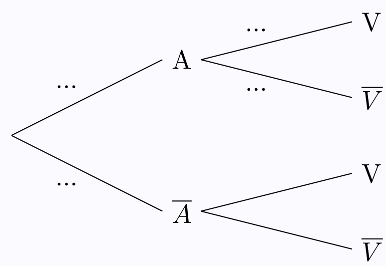
Exercice n°4

L'agence TOCAR propose aux youtubers de les faire connaître sur Internet. Elle affirme que ses clients possèdent 80% de vidéos vues plus de 200 000 fois.
Les statistiques de cette agence montrent que si un youtuber met en ligne une vidéo en lien avec le thème principal de sa chaîne, la probabilité que cette vidéo soit vue plus de 200 000 fois est égale à 0,7.

La youtubeuse *Mimolette* fait appel à cette agence pour avoir plus de vidéos vues. Elle poste 80% de vidéos portant sur le thème principal de sa chaîne.
On appelle :

— L'événement A : « la youtubeuse poste une vidéo en rapport avec le thème principal de sa chaîne » ;
— L'événement V : « la vidéo postée est vue plus de 200 000 fois ».

1. Compléter l'arbre des probabilités suivant :



2. Calculer la probabilité qu'une vidéo soit vue plus de 200 000 fois sachant qu'elle n'a pas de lien avec le thème principal de la chaîne si l'agence TOCAR disait la vérité.
3. Donner un encadrement du pourcentage de vidéos vues plus de 200 000 fois par client.

Exercice n°5

Dans un lycée de 2000 élèves, 55% sont des garçons.
Parmi les garçons, 70% font « Anglais L.V.1 » , le reste faisant « Espagnol L.V.1 ».
On sait de plus que 65% des élèves de ce lycée font « Anglais L.V.1 ».

1. Compléter le tableau suivant :

	Filles	Garçons	Total
Anglais L.V.1			
Espagnol L.V.1			
Total			

2. On choisit au hasard un élève de ce lycée.
   Quelle est la probabilité que ce soit un garçon faisant Anglais L.V.1 ?
3. On choisit au hasard un élève de ce lycée.
   Quelle est la probabilité que ce soit une fille ou que l'élève fasse Espagnol L.V.1 ?
4. On choisit au hasard un élève parmi les garçons.
   Quelle est la probabilité qu'il fasse Espagnol L.V.1 ?
5. On choisit au hasard un élève.
   Sachant que c'est une fille, quelle est la probabilité qu'elle fasse Anglais L.V.1 ?

Exercice n°6

Ceci est un Q.C.M. Une seule réponse est exacte pour chaque question.

Les élèves de deux classes de terminale ES (désignées par TE 1 et TE 2) sont répartis selon leur spécialité (qui sont abrégées par SES, LV, Math) de façon suivante.

Spécialité \ Classe	TE 1	TE 2	Total
SES	16	8	24
LV	12	14	26
Math	6	10	16
Total	34	32	66

On interroge un élève au hasard. Les données précédentes sont à utiliser pour les quatre questions suivantes.

1. La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE 1 est égale à :

   (a) $\frac{1}{66}$ (b) $\frac{1}{34}$ (c) $\frac{17}{33}$

2. La probabilité que l'élève interrogé suive l'enseignement de spécialité Math ou appartienne à la TE 1 est égale à :

   (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{25}{33}$ (c) $\frac{1}{11}$

3. La probabilité que l'élève interrogé suive la spécialité Math sachant qu'il appartient à la TE 1 est égale à :

   (a) $\frac{1}{34}$ (b) $\frac{1}{11}$ (c) $\frac{3}{17}$

4. La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE 1 sachant qu'il suit la spécialité Math est égale à :

   (a) $\frac{3}{17}$ (b) $\frac{14}{17}$ (c) $\frac{3}{8}$

Exercice n°7

On considère deux événements A et B de l'univers Ω. Nous avons réunis dans le tableau suivant le nombre d'éléments de A et B.

	A	$\overline{A}$
B	7	10
$\overline{B}$	6	3

1. Calculer $p(A \cap B)$.
2. Calculer $p(A \cup B)$.
3. Calculer $p(\overline{A} \cup B)$.
4. Calculer $p(\overline{A \cap B})$.

Exercice n°8

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :
- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :
- 5% des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10% des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20% des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc. On note les événements suivants :
- N : « L'ordinateur est neuf »
- R : « L'ordinateur est récent »
- A : « L'ordinateur est ancien »
- D : « L'ordinateur est défaillant »
- $\overline{D}$ l'événement contraire de D.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.
3. Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,132 5.
4. Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

Exercice n°9

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
Les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
On note A l' événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement C : « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'événement D : « le sac est défectueux ».
3. Calculer la probabilité de l'événement E : « le sac ne présente aucun défaut ».
4. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

Exercice n°10

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.
Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
   — A_1 l'événement : « la personne est absente lors d'un premier appel » ;
   — R_1 l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».
   Calculer $p(R_1)$.
2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois à une heure différente et alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3.
   Sachant qu'elle est présente, la probabilité pour qu'elle n'accepte pas de répondre au questionnaire est encore 0,8.
   Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
   On note :
   — A_2 l'événement : « la personne est absente lors du second appel » ;
   — R_2 l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;
   — R l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire ».
   Montrer que la probabilité de R est 0,176.
3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, calculer la probabilité que la réponse ait eu lieu lors du premier appel.

Exercice n°11

Une maladie M affecte une personne sur 1 000 dans une population donnée.
Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% (lorsque cette maladie est effectivement présente). En revanche, pour un individu sain, la probabilité que le test soit positif est de 0,1% (on dit que 0,1% est le taux de faux positifs).

Si un test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement malade ?

Exercice n°12

On a un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint 0,5% de la population.
Sur 99% des malades, le test réagit (c'est-à-dire que 99% des malades sont identifiés par le test) mais sur 2% des sains, le test montre une fausse réaction positive. Sur un patient, un test est positif. Quelle est la probabilité d'être malade ?

Exercice n°13

Pour détecter un cancer, à partir de 50 ans, des femmes font une mammographie.
On sait que 1% des femmes sont atteints par un cancer à cet âge.
La détection d'un cancer sur le mammogramme fonctionne dans 9 sur 10 cas. Par contre, une fausse détection (c'est-à-dire des femmes saines auxquelles un cancer est détecté) est de 9%.
Une femme vient d'apprendre une mammographie positive. Quel est la probabilité d'avoir vraiment un cancer ?

Exercice n°14

La probabilité d'avoir le cancer du colon à l'âge de 50 ans est de 0,3%.
Le médecin offre un test de détection de sang dans les selles.
Pour 50% des personnes qui souffrent d'un cancer du colon, ce test est positif. Les détections faux-positives sont de 3%.
Quelle est la probabilité de souffrir d'un cancer sachant que le test a été positif ?

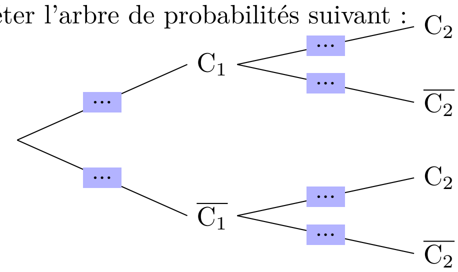
Exercice n°15

SIDA : Le test double standard (ELIZA et Western-Blot) détectent dans 99,9% des cas le virus IH et la probabilité d'être un faux-positif est de 0,01%.
Une personne sans facteurs de risque particuliers appartient à un groupe dans lequel seulement 0,01% portent le VIH. Son test est positif.
Quelle est la probabilité d'être porteur de VIH ?

Exercice n°16

Madame Laguigne est très malchanceuse. Elle a constaté que la probabilité pour qu'une montre qu'elle vient d'acheter fonctionne correctement est égale à 0,7. De plus, si la montre qu'elle vient d'acheter ne fonctionne pas, la probabilité pour que la montre qu'elle achètera après fonctionne correctement est égale à 0,5 alors que si la montre fonctionne bien cette probabilité est égale à 0,7.
On pose :
— C_n l'événement : « la n-ième montre fonctionne correctement » pour un entier n supérieur ou égal à 1 ;
— p_n la probabilité que C_n se réalise.

1. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Montrer que la probabilité que la deuxième montre fonctionne est égale à 0,64.
3. Justifier l'égalité : $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}5$.

4. On pose :

$$u_n = p_n - 0{,}625.$$

(a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) En déduire p_n en fonction de n.

(c) Vers quel nombre se rapproche p_n quand n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Exercice n°17

Quand Pierre est en vacances, il pense à sortir les poubelles dans 90% des cas où il le faut, c'est-à-dire la veille du ramassage des ordures. Quand il n'est pas en vacances, il pense à les sortir une fois sur deux.
Son voisin, prof de math de métier, a remarqué que globalement, Pierre pensait à sortir ses poubelles 548 fois sur 1 000.
En notant :

— V l'événement « Pierre est en vacances »
— S l'événement : « Pierre pense à sortir les poubelles la veille du ramassage »

calculer la probabilité que Pierre soit en vacances.

Exercice n°18

Une étude réalisée sur les étudiants d'une université a permis d'établir que 70% des étudiants possèdent un ordinateur et que, parmi ceux-ci, 40% possèdent une automobile.
On sait aussi que 55% des étudiants de l'université ne possèdent pas d'automobile.
On choisit au hasard un étudiant de cette université et on note :

— O l'événement « l'étudiant possède un ordinateur »
— A l'événement « l'étudiant possède une automobile ».

Les événements O et A sont-ils indépendants ?

Exercice n°19

Chaque jour, Jeanne ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :

— D : « Son portable est déchargé »
— O : « Elle a oublié son portable chez elle »

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

Elle a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à 0,05 et, d'autre part, qu'elle oublie son portable chez elle un jour sur dix.

1. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité que Jeanne oublie son portable chez elle et qu'il ne soit pas déchargé ?
2. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité qu'elle ne puisse pas se servir de son portable ?

Exercice n°20

Une urne contient trois boules B_1, B_2 et B_3 indiscernables au toucher. On vide l'urne par tirages successifs des boules.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
   Sont-ils équiprobables ?
2. On considère les événements suivants :
   — A : « La boule B_1 est extraite de l'urne avant B_2. »
   — B : « La boule B_1 est extraite au premier tirage. »
   — C : « La boule B_1 est extraite au deuxième tirage. »

   (a) Déterminer les probabilités de ces trois événements.

   (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

   (c) Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice n°21

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les événements :

— R : « le jeton tiré est rouge »,
— V : « le jeton tiré est vert »,
— G : « le jeton tiré est gagnant ».

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité de l'événement « le jeton tiré est un jeton vert et marqué gagnant ».
3. Soit P(G) la probabilité de tirer un jeton gagnant.
   Montrer que $P(G) = \dfrac{2}{5}$.
4. Sachant que le jeton tiré est gagnant, calculer la probabilité qu'il soit de couleur rouge.
5. On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, deux jetons dans l'urne.
   Calculer la probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant ». Expliquer votre démarche.

Exercice n°22

Un grand journal a fait réaliser une enquête sur un échantillon représentatif de la population française des 18-34 ans.

— 35% des personnes interrogées indiquent que leur principale source d'information est la **télévision** ; parmi elles, 40% lisent aussi la presse écrite.
— 25% des personnes interrogées indiquent que leur principale source d'information est la **radio** ; parmi elles, 60% lisent aussi la presse écrite.
— Les autres personnes interrogées indiquent que leur principale source d'information est **Internet** ; parmi elles, 75% lisent aussi la presse écrite.

On choisit une personne au hasard dans l'échantillon et on considère les événements :

— T : « La personne a pour principale source d'information la télévision. »
— R : « La personne a pour principale source d'information la radio. »
— I : « La personne a pour principale source d'information Internet. »
— E : « La personne lit la presse écrite. »

1. À l'aide des informations fournies par l'énoncé, indiquer la valeur de $P_T(E)$ et $P_R(\overline{E})$.
2. Montrer que $P(E) = 0{,}59$.
3. Calculer $P_E(I)$ (donner une valeur approchée au centième).
4. Les événements E et I sont-ils indépendants ?