6

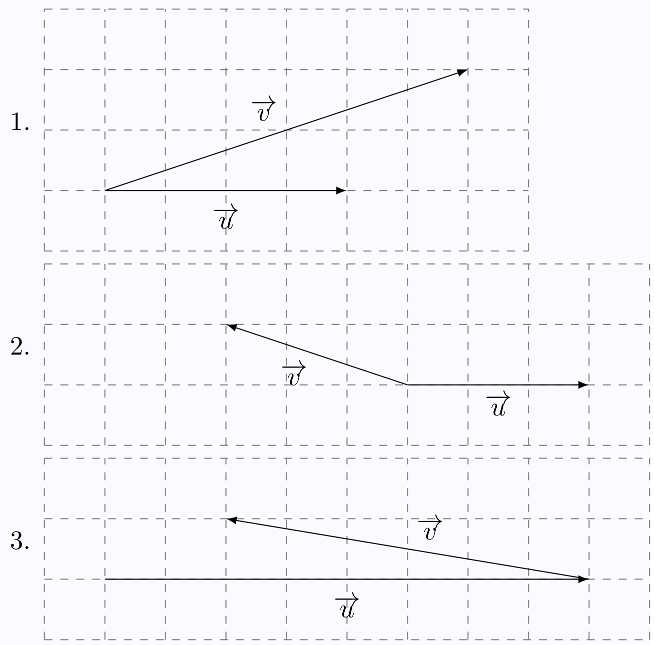
Produit scalaire

Série d'exercices

Corrigés — **Classe : 1re Spé** — **Lycée : Evariste Galois**

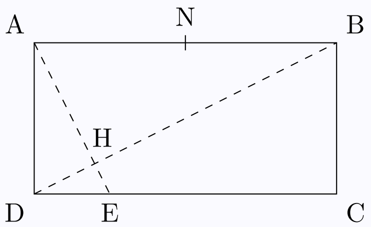
Exercice n°1

Dans chacun des cas suivants, déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis en déduire une valeur approchée de la mesure (en degrés) de l'angle $(\vec{u}\,,\vec{v})$.



Exercice n°2

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$. E est le point de $[DC]$ tel que $DE = 1$. Les droites (AE) et (BD) se coupent en H et N est le milieu de $[AB]$.



1. Décomposer $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$ à l'aide de la relation de Chasles, puis calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$.
   Que peut-on conclure quant à (AE) et (BD) ?
2. En calculant de deux façons différentes $\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{BD}$, trouver BH.
3. Montrer que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{HN}$.
4. Calculer HA, puis montrer que $\overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} = \dfrac{8}{5}$.
5. Justifier que $HN = 2$.
6. Calculer $\cos(\widehat{AHN})$ et en déduire une valeur approchée de $\widehat{AHN}$ au degré près.

Exercice n°3

Soit ABCD un carré. On pose :

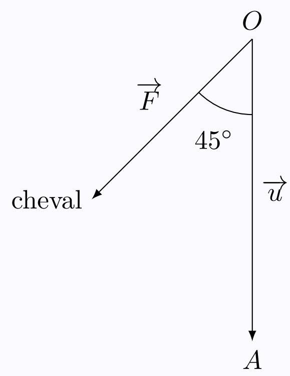
— I le milieu de [AB] ;
— J le milieu de [AD] ;
— K le milieu de [ID].

1. Montrer que $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{4}AB^2$.
2. Montrer que (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

Exercice n°4

1. Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont appliquées en un point O, formant un angle de 50°.
   Leur intensité est respectivement de 300 N et 200 N.
   Par définition, la résultante est le vecteur $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

   Calculer l'intensité de cette résultante.
2. Pour tirer sur 50 mètres une péniche, un cheval exerce une force $\vec{F}$ de 2 000 N au point où est accrochée la corde sur la péniche. La corde fait un angle de 45° avec la direction de la péniche.

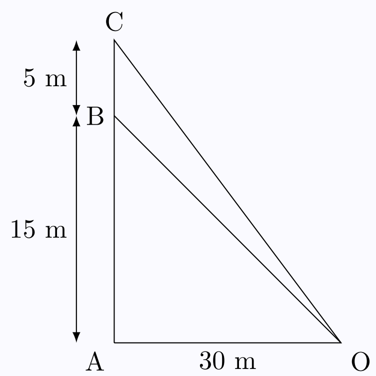


On rappelle que le travail d'une force $\vec{F}$ est $W = \vec{F} \cdot \vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur représentant le déplacement de l'objet.

(a) Calculer W.

(b) Calculer l'intensité de la force que doit exercer un bateau tirant cette même péniche et se déplaçant dans la même direction que celle-ci pour que le travail soit le même.

Exercice n°5



1. Montrer que
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}.$$
2. Calculer $\widehat{BOC}$.

Exercice n°6

Soit ABCD un carré de centre O tel que AB = 2. On pose I le milieu de [AB].

1. Démontrer que l'ensemble des points M tels que
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2$$
est la droite (OI).
2. (a) Montrer que, quel que soit le point M du plan,
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \mathrm{MI}^2 - 1.$$
(b) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 4$?

Exercice n°7

On considère deux points A et B tels que AB = 6, ainsi que I le milieu de [AB].
On pose $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points M tel que
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k,$$
où $k\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout point M du plan,
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \mathrm{MI}^2 - 9.$$
2. En déduire $\mathcal{E}_{16}$.
3. Pour quelles valeurs de k l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est-il réduit à l'ensemble vide ?

Exercice n°8

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AC = 6$.
   (a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   (b) En déduire la valeur approchée à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{DAB}$.
2. Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que $EF = 6$, $EH = FH = 5$.
   (a) Calculer $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}$.
   (b) En déduire la valeur approchée à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{FEH}$.
3. Soit $IJKL$ un parallélogramme tel que $IK = 8{,}5$ et $JL = 5$.
   (a) Calculer $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IL}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = \mathrm{IJ}^2 + \dfrac{189}{16}$.
   (c) En déduire que $\mathrm{IJ}^2 - 8{,}5\cos(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK})\mathrm{IJ} + \dfrac{189}{16} = 0$.
   (d) En déduire que $\cos^2(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}) \geqslant \dfrac{189}{289}$.
   (e) En déduire un encadrement approximatif (à l'unité près) de l'angle $(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IK})$ en degrés.

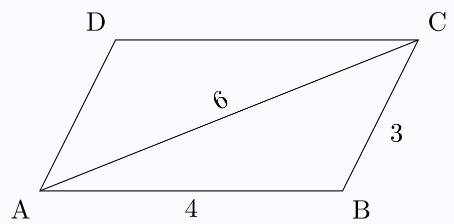
Exercice n°9

Dans le plan, on considère un point M et un cercle Γ, de centre O et de rayon r.
Soit d une droite passant par M et coupant Γ en deux points A et B.
On appelle *puissance de M par rapport à Γ* le nombre : $\mathcal{P}_\Gamma(\mathrm{M}) = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{r}^2$.

1. En considérant le projeté orthogonal de O sur (AB), c'est-à-dire le point H de (AB) tel que $(OH)\perp(AB)$, montrer que :
   — si M est à l'extérieur de Γ alors $MA\times MB = \mathcal{P}_\Gamma(M)$;
   — sinon, $MA\times MB = -\mathcal{P}_\Gamma(M)$
2. On considère un cercle Γ', de centre O' distinct de O, et de rayon r'. Soit M un point tel que $\mathcal{P}_\Gamma(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M)$.
   (a) Soient K le projeté orthogonal de M sur (OO') et I le milieu de $[OO']$.
   Après avoir justifié que $r^2 - r'^2 = MO^2 - MO'^2$, montrer que $r^2 - r'^2 = 2\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{IK}$.
   (b) Déterminer alors l'ensemble des points M.
   Cet ensemble est appelé l'*axe radical des deux cercles*.
3. Soit Γ'' un troisième cercle de centre O'' tel que O'' n'appartient pas à (OO').
   Montrer que les trois axes radicaux sont concourants en vous aidant de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle.

Exercice n°10

On considère la figure suivante :



ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $BC = 3$ et $AC = 6$.

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice n°11

On considère un carré ABCD de côté 1.
On construit alors les points E et F tels que :
— BEC est un triangle équilatéral ;
— F est un point de la droite (BC).
Déterminer la position du point F pour que les droites (AF) et (DE) soient perpendiculaires.
Indication : on pourra se placer dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.