5

Trigonométrie

Série d'exercices

Corrigés Classe : 1re Spé Lycée : Evariste Galois

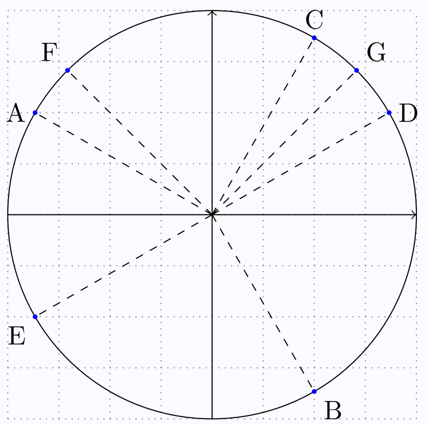
Exercice n°1

Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants.

1. $\dfrac{17\pi}{3}$ ....
2. $-\dfrac{8\pi}{3}$ ....
3. $\dfrac{9\pi}{5}$ ....
4. $-\dfrac{2\,015\pi}{6}$ ....
5. $\dfrac{9\,999\pi}{7}$ ....
6. $-\dfrac{78\pi}{9}$ ....
7. $\dfrac{89\pi}{9}$ ....
8. $-\dfrac{107\pi}{13}$ ....
9. $\dfrac{21\pi}{2}$ ....
10. $-\dfrac{123\,321\pi}{123}$ ....

Exercice n°2

Attribuer à chaque point sur le cercle trigonométrique ci-dessous la mesure principale de l'angle qui lui est associé.



Exercice n°3

1. Convertir $\dfrac{7\pi}{18}$ radians en degrés.
2. Convertir $72°$ en radians.

Exercice n°4

Placer sur le cercle trigonométrique les angles suivants :

1. $-\dfrac{5\pi}{6}$ ....
2. $\dfrac{7\pi}{4}$ ....
3. $\frac{\pi}{3}$ ....
4. $\dfrac{\pi}{4}$ ....
5. $\dfrac{\pi}{6}$ ....
6. $-\dfrac{2\pi}{3}$ ....
7. $-\frac{3\pi}{4}$ ....
8. $-\frac{13\pi}{3}$ ....

Exercice n°5

1. Calculer $\cos\left(\dfrac{215\pi}{6}\right)$.
2. Calculer $\sin\left(\dfrac{316\pi}{6}\right)$.

Exercice n°6

1. Un logiciel de calcul donne : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.
   En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{4}{5}$.
   Calculer $\cos(x)$.
3. On donne $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.
   Montrer que $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, puis donner la valeur exacte simplifiée de $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice n°7

1. Après quelques calculs, Pierre affirme que le sinus d'un angle a une valeur exacte égale à $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.
   Pourquoi cette valeur est obligatoirement fausse ?
2. L'erreur étant rectifiée, le sinus de cet angle a pour valeur exacte $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$.
   Donner les valeurs exactes possibles du cosinus de cet angle.

Exercice n°8

Calculer

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}\right)^2.$$

Exercice n°9

À l'aide des formules de rotation, calculer :

1. $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.
2. $\sin^2\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$.
3. $\sin\left(\dfrac{13\pi}{22}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{11}\right)$.
4. $1+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{13}\right)+\sin^2\left(\dfrac{11\pi}{26}\right)$.

Exercice n°10

Résoudre sur $[0;2\pi[$ les équations suivantes.

1. $\cos x = \dfrac{1}{2}$.
2. $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice n°11

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$:

1. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.
4. $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice n°12

On considère l'équation d'inconnue x suivante :

$$81^{\sin^2(x)} + 81^{\cos^2(x)} = 30. \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation :

$$v^2 - 30v + 81 = 0.$$

2. En déduire les solutions de (E).

Exercice n°13

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \big(\cos x + \sin x\big)^2 + \big(\cos x - \sin x\big)^2.$$

Montrer que f est une fonction constante.

Exercice n°14

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin^4(x)}.$$

Montrer que f est 2π-périodique.

Exercice n°15

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3(x)\cos(3x).$$

Montrer que f est π-périodique et paire.

Exercice n°16

$$f(x) = \sin^3(x)\cos(3x).$$

Montrer que f est π-périodique et impaire.

Exercice n°17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

1. La fonction f est-elle paire ? Impaire ? Justifier.
2. Montrer que f est 2π-périodique.

Exercice n°18

n considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \cos(x) + \sin^2(x).$$

1. Étudier la parité de f.
   Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
2. Montrer que f est 2π-périodique.
   Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
3. Justifier que $f(x) = -\cos^2(x) + \cos(x) + 2$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]-\pi;\pi]$.
5. Montrer que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$.

Exercice n°19

On applique une tension sinusoïdale u aux bornes d'un circuit électrique comportant en série une résistance et une diode idéale.
Le temps t est exprimé en seconde.
La tension est donnée par la fonction u définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par :

$$u(t) = \sqrt{3}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

La diode est non passante si $u(t) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et elle est passante si $u(t) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. La diode est-elle passante à l'instant $t = 0$?
2. Calculer $u\left(\frac{1}{100}\right)$. Interpréter le résultat.
3. On admet que $u\left(t+\frac{2}{100}\right) = u(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
   En déduire une propriété de la fonction u.

Exercice n°20

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - x$.
   Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?
   (a) f est paire.
   (b) f est impaire.
   (c) Pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x)$.
   (d) Pour tout réel x, $f(x+\pi) = -f(x)$.
2. Dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ a pour solutions :
   (a) $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.
   (b) $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.
   (c) $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.
   (d) $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. Le nombre réel $-\dfrac{3\pi}{4}$ est associé au même point du cercle trigonométrique que le réel :

   (a) $-\dfrac{14\pi}{4}$. (b) $\dfrac{7\pi}{4}$. (c) $\dfrac{13\pi}{4}$. (d) $\dfrac{19\pi}{4}$.