Fonctions exponentielles

Terminale STMG : maths-mde.fr

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif. La fonction exponentielle de base a est la fonction qui associe à tout réel x le réel a^x :

$$x \to a^x.$$

Remarque :

La fonction exponentielle de base a est définie pour tout réel positif x comme prolongement de la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cette définition s'étend aux réels x négatifs en posant : $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Exemples :

- $x \to 2^x$ ....
- $x \to \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ ....

1 Sens de variation

Propriétés

Soit a un nombre réel strictement positif.Comme la suite géométrique associée, la fonction exponentielle de base a est :

- strictement croissante si $a > 1$;
- strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Exemples : Donner le sens de variation des fonctions suivantes dénies sur $\mathbb{R}$.

- $x \to 3 \times 1,2^x$

  ....

  ....
- $x \to 1,3 \times 0,8^x$

  ....

  ....
- $x \to -0,5 \times 4^x$

  ....

  ....
- $x \to -5 \times 0,4^x$

  ....

  ....

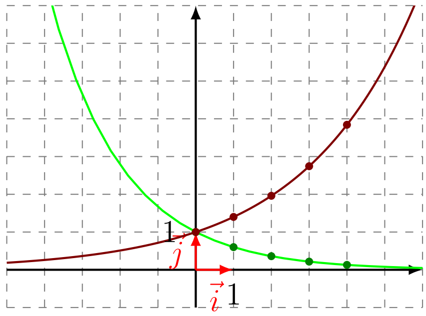
2 Représentation graphique

Propriétés

- Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x, on a : $a^x > 0$.
- Pour tous réels x et y :
  — si $a > 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$;
  — si $0 < a < 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$;
  — si $a \neq 1$, alors $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

Exemples :

- En rouge est représentée :
  La suite (a^n) avec $a > 1$.
  La fonction $x \to a^x$ avec $a > 1$, ici $a = 1,4$.
- En vert est représentée :
  La suite (a^n) avec $0 < a < 1$.
  La fonction $x \to a^x$ avec $0 < a < 1$, ici $a = 0,6$.



3 Propriétés algébriques

Propriétés. admises

Soit un réel strictement positif a, deux réels x et y et un entier relatif n. Alors :

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$;
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;
- $a^{nx} = (a^x)^n$.

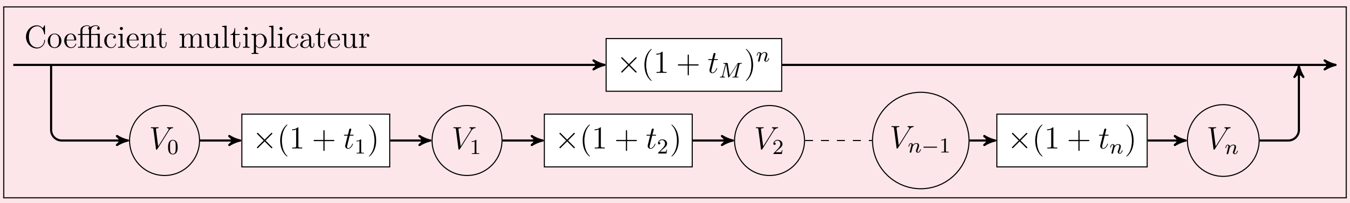
Exemples : Simplifier les expressions suivantes, pour a réel strictement positif.

- $a^3 \times a^3 =$ ....
- $a^2 \times a^{-3} =$ ....
- $\dfrac{a^5}{a^8} =$ ....
- $(a^5)^3 =$ ....

4 Application au calcul du taux moyen

Définitions

• Lors de n évolutions successives à des taux t_1, t_2, $\cdots$, t_n entre une valeur V_0 et une valeur V_n, on appelle taux d'évolution moyen le taux noté t_M, qu'il faut appliquer n fois successivement à la valeur V_0 pour obtenir la valeur V_n.



• Le taux moyen t_M est donc tel que :

$$(1+t_M)^n = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n).$$

Propriétés

- Calculer un taux moyen revient à résoudre une équation du type : $x^n = CM$ où $CM > 0$ est le coefficient multiplicateur global et n un entier naturel.
- Cette équation a pour solution : $x = CM^{\frac{1}{n}}$.

Exemple : Sous forme d'exercice
De 2017 à 2020, l'inscription à une école de danse a subi trois augmentations annuelles, de 16%, 15% puis 20%.

- Vérifier que la moyenne arithmétique de 16, 15 et 20 est égale à 17. Les trois hausses précédentes sont-elles équivalentes à trois hausses successives de 17% ?

 ....

 ....

 ....

 ....
- Justifier qu'au cours de ces 3 ans, le prix de l"inscription a été multiplié par 1,6008.

 ....

 ....

 ....
- Justifier que l'équation $x^3 = 1,6008$ admet pour solution $x = 1,6008^{\frac{1}{3}}$.

 ....
- En déduire le taux d'évolution annuel moyen, à 0,01 % près, correspondant à ces trois hausses.

 ....

 ....

 ....

 ....

Exemple : Sous forme d'exercice
Le tableau ci-dessous donne le taux d'évolution annuel du cours en bourse des actions d'une entreprise.

Année	2016	2017	2018	2019
Taux	+4,1%	-5,8%	+3,2%	+3,9%

a) Déterminer le taux d'évolution annuel moyen de ces actions entre 2016 et 2019 à 0,1% près.

....

....

....

....

....

....

....

....

b) Une autre action passe sur cette même période de36,20 € à 38,88 €. Déterminer son taux d'évolution annuel moyen à 0,1% près.

....

....

....

....

....

....

....