1 Définition & Propriétés

Définition

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

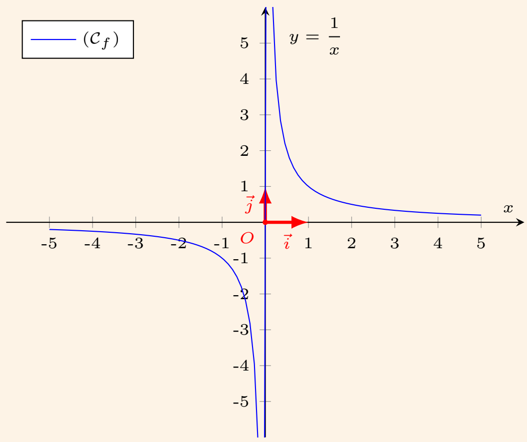
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Remarque : Pour que la fonction f soit définie, il faut que le dénominateur soit différent de 0, c'est-à-dire que $x \neq 0$. On dit que 0 est la valeur interdite.

Propriétés

- La courbe représentative de la fonction inverse est appelée hyperbole.
- Elle admet l'origine du repère comme centre de symétrie
- La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
  — Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
  — Pour tout $x \neq 0$, $x^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$.
- La fonction inverse est stricte-ment décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et sur l'intervalle $]0; +\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
f	$\searrow$	||	$\searrow$



Exemples : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 9x + 1 + \dfrac{36}{x}$.

- Déterminer $h'(x)$
  ....
  ....
- Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\dfrac{(3x-6)(3x+6)}{x^2}$.
  ....
  ....
  ....
  ....
- En déduire les variations de h.
  ....
  ....
  ....
- Comparer vos résultats aux graphiques donnés par votre calculatrice.
  ....
  ....

2 Comportement aux bornes de $D_f = \mathbb{R}^*$

Activité : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. (a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000
$f(x)$						

   (b) Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de $f(x)$ quand les valeurs prises par x sont de plus en plus grandes ?

   ....

   ....

2. (a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\ 000}$	$\frac{1}{10\ 000}$	$\frac{1}{100\ 000}$
$f(x)$						

   (b) Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de $f(x)$ quand les valeurs prises par x sont de plus en plus proches de 0 tout en restant positives ?

   ....

   ....

3. Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de $f(x)$ quand les valeurs prises par x sont de plus en plus proches de 0 tout en restant négatives ?

   ....

   ....

Propriétés

- L'inverse d'un nombre x est d'autant plus proche de 0 que les valeurs prises par x sont grandes. On dit alors que la limite de la fonction inverse quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
- L'inverse d'un nombre x est d'autant plus grand que les valeurs de x, tout en restant positives, sont proches de 0. On dit alors que la limite de la fonction inverse quand x tend vers 0, tout en restant positif, est égale à $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
- Avec des notations analogues, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Définitions

- On dit que la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- De même, on dit que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Exemples : Soit k la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $k(x) = 3 - \dfrac{4}{x}$. Calculer :

- $\lim\limits_{x\to0+} k(x) =$..
- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) =$..