



## 1 Définition & Propriétés

### Définition

Soient A et B deux événements d'un univers  $\Omega$  tels que  $p(A) \neq 0$ .

On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A** le nombre noté  $p_A(B)$  défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

### Propriété

Soient A et B deux événements tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ . Alors,

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A).$$

**Exemple :** Dans une urne, on place 10 boules, 3 noires et 7 rouges. On tire au hasard 2 boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

En notant :

- $N_1$  l'événement « la boule tirée est noire au 1<sup>er</sup> tirage »,
- $N_2$  l'événement « la boule tirée est noire au 2<sup>e</sup> tirage »,

la probabilité demandée est  $p(N_1 \cap N_2)$ .

- $p(N_1) = \frac{3}{10}$  car il y a 3 boules noires sur 10 lors du 1<sup>er</sup> tirage ;
- $p_{N_1}(N_2) = \frac{2}{9}$  car il ne reste plus que 2 boules noires sur 9 au 2<sup>e</sup> tirage si l'on sait que l'on a déjà tiré une boule noire au 1<sup>er</sup> tirage.

Ainsi,

$$\begin{aligned} p(N_1 \cap N_2) &= p(N_1) \times p_{N_1}(N_2) \\ &= \dots \\ &= \dots. \end{aligned}$$

### 1.1 Événement contraire

#### Propriété

Soient A et B deux événements tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ . Alors,

$$p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B).$$

### 1.2 Partition de l'univers

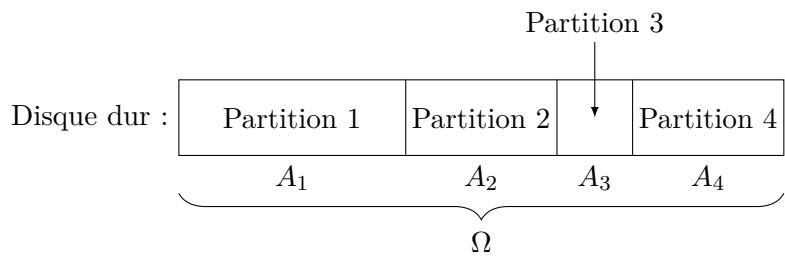
#### Définition

On dit que les  $n$  événements  $A_1, \dots, A_n$  forment une **partition** de  $\Omega$  si :

- tous les événements sont incompatibles deux à deux :  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , pour tout  $i \neq j$  ;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ .

**Remarque :** — A et  $\bar{A}$  forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement A.

- La notion de partition est similaire en informatique : un espace de stockage peut être découpé en plusieurs partitions :



## 2 Probabilités totales

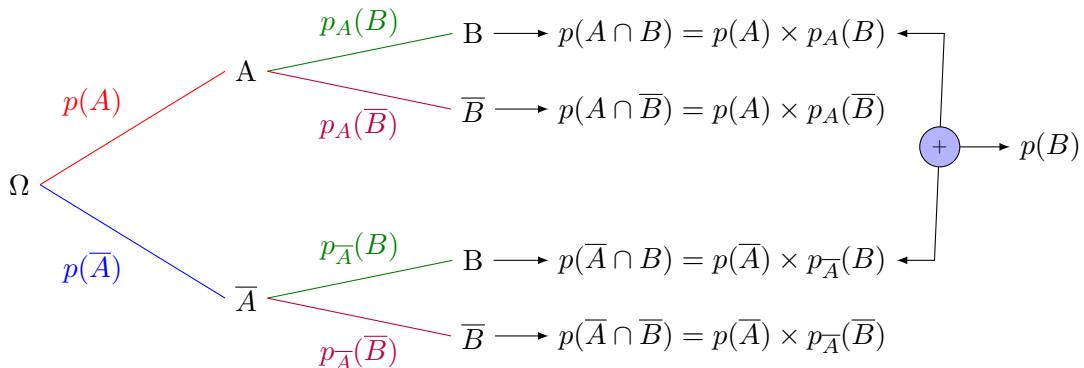
### 2.1 Version « simple » de la formule des probabilités totales

#### Propriété

Soient A et B deux événements tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ . Alors,

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B).$$

On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités :



### 2.2 Formule des probabilités totales

#### Propriété

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  événements formant une partition de l'univers, avec  $p(A_k) \neq 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Alors, pour tout événement B,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B).$$

**Exemple :** Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

|                                   |      |      |      |
|-----------------------------------|------|------|------|
| N° de la machine utilisée         | 1    | 2    | 3    |
| Pourcentage de pièces produites   | 50   | 35   | 15   |
| Fréquence des défauts par machine | 0,01 | 0,02 | 0,06 |

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.

Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On convient de noter :

- $M_k$  l'événement : « La pièce provient de la machine n°  $k$  » ;
- $D$  l'événement : « La pièce est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

# 3 Indépendance

## Propriété

Soient A et B deux événements tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ . Alors,

$$p_B(A) = p(A) \iff p_A(B) = p(B).$$

## Définition. Événements indépendants

Soient A et B deux événements tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ .

On dit que A et B sont **indépendants** quand  $p_B(A) = p(A)$ .

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

## Propriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

**Exemple :** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements :

- A : « Tirer un cœur » ;
- B : « Tirer un roi ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On a :

- $p(A) = \frac{1}{4}$  car il y a 8 coeurs sur les 32 cartes en tout ;
- $p_B(A) = \frac{1}{4}$  car, sachant que la carte est un roi, il n'y a qu'une seule carte portant un cœur sur les 4 rois.

On a alors  $p(A) = p_B(A)$ , ce qui signifie que A et B sont indépendants.

## Propriété

Soient A et B deux événements indépendants. Alors, A et  $\bar{B}$  sont indépendants.

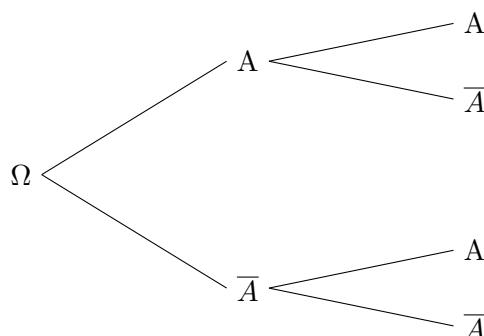
**Remarque :** Deux événements A et B incompatibles tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$  ne sont pas indépendants.

En effet, A et B incompatibles signifie d'une part que  $p(A) \times p(B) \neq 0$ , d'autre part que  $p(A \cap B) = 0$ .

Ainsi,  $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$  ; les événements ne sont donc pas indépendants.

# 4 Succession de deux épreuves indépendantes

Imaginons une expérience à 2 issues (A et  $\bar{A}$  par exemple) que l'on répète deux fois de façon indépendante. Alors, la situation peut se représenter par l'arbre suivant :



Ainsi,

- la probabilité d'obtenir deux fois l'événement A est  $p(A)^2$  ;
- la probabilité d'obtenir une seule fois l'événement A est  $p(A \cap \bar{A}) + p(\bar{A} \cap A) = 2p(A \cap \bar{A})$  ;

— la probabilité de ne pas obtenir l'événement A est  $p(\bar{A})^2$ .

**Exemple :** On lance un dé cubique équilibré deux fois de suite, en considérant que les lancers sont indépendants.

On pose A : « Obtenir un multiple de 3. » Ainsi,  $p(A) = \frac{1}{3}$ .

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 une seule fois sur les deux lancers est :

$$2p(A \cap \bar{A}) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$