Suites

Terminale STMG : maths-mde.fr

1 Rappels

Définitions

— Une suite numérique est une liste de nombres réels, ordonnée, et indexée par les entiers naturels (ou numérotée).

— Une suite numérique se note généralement (u_n), l'indice n représentant un nombre entier naturel.

— Le nombre u_n est le terme de rang n de la suite (u_n), soit le $n^{\text{ème}}$ terme.

Exemples : Compléter les suites "logiques" suivantes. Donner, si possible, l'expression de u_n.

- 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ....
- 2 ;4 ;6 ;8 ;10 ....
- 3 ;7 ;11 ;15 ;19 ....
- 2 ;4 ;8 ;16 ;32 ....
- 2 ;3 ;5 ;9 ;17 ....
- 0 ;1 ;8 ;27 ;64 ;125 ....
- 1 ;1 ;2 ;3 ;5 ;8 ;13 ;21 ....

1.1 Modes de génération d'une suite

Définition

Une suite (u_n) est définie de manière **explicite** lorsque l'on peut exprimer le terme général u_n en fonction de son indice n.

Exemples : Pour chacune des suites suivantes, on peut calculer directement n'importe quel terme u_n de la suite en remplaçant n par la valeur souhaitée.

- $u_n = n^2 + n$ ....
- $u_n = \dfrac{2}{n+1}$ ....
- $u_n = 3n + 2$ ....
- $u_n = 3^n$ ....

Définition

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** quand elle est définie par la donnée :

— de son terme initial, généralement u_0 ;

— d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant.

Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = 1000 \\ u_{n+1} & = 1,04\, u_n \end{cases}$.

Alors, $u_0 = 1000$;

$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040$;

$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6$;

$u_3 = 1,04 \times u_2 = \ \ldots$

1.2 Représentation graphique

Définition

- Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.
- Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$, alors

$u_0 =$ ....

$u_1 =$ ....

$u_2 =$ ....

$u_3 =$ ....

....

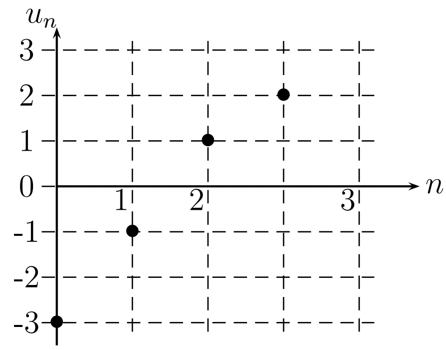
....

....

$u_{20} =$ ....

$u_{50} =$ ....

$u_{5250} =$ ....



1.3 Sens de variation d'une suite

Définitions

- Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier naturel n : ....
- Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier naturel n : ....
- Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n : ....
- Une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque : Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. En effet,
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ....
....

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ est croissante. En effet,
$u_{n+1} - u_n =$ ....
....

2 Suites arithmétiques

Définition

Une suite est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant un nombre réel constant r, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \dots \quad \dots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \dots$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ est une ....
....

Propriétés

- Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.
- **Plus généralement :** Pour tous entiers n et p : $u_n = u_p + (n-p)r$.
- Si $r > 0$, (u_n) est croissante ; si $r < 0$, (u_n) est décroissante ; si $r = 0$, (u_n) est constante.

Exemple : Soit (u_n) al suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel n.. . . . .
   . . . .
2. Calculer u_{10} et u_{12}.. . . . .
   . . . .

Propriété

Trois nombres x, y et z sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique si la moyenne arithmétique du plus petit et du plus grand est égale au troisième, soit $\dfrac{x+z}{2} = y$.

Exemples :

1. Les nombres 23, 35 et 47 sont-ils les termes consécutifs d'une suite arithmétique ?. . . . .
   . . . .
2. La suite (v_n) est telle que : $v_{23} = -13$, $v_{24} = -23$ et $v_{25} = -25$. La suite (v_n) est-elle arithmétique ?. . . . .
   . . . .

Propriété

- Pour tout entier naturel n, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$
  Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :
$$\text{Le nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Exemples :

1. La somme des 10 premiers entiers est égale à :. . . . .
   . . . .
2. La somme des 100 premiers entiers est égale à :. . . . .
   . . . .
3. La somme des 20 premiers termes d'une suite arithmétique, de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 5 est égale à :. . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
4. La somme des 20 premiers termes d'une suite arithmétique, de premier terme $u_0 = 1$ et de raison -2 est égale à :. . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .

3 Suites géométriques

Définition

Une suite est dite géométrique lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un nombre réel constant q, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = q \times v_n$.

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \xrightarrow{\times q} v_3 \xrightarrow{\times q} v_4 \xrightarrow{\times q} \cdots \quad \cdots \quad v_n \xrightarrow{\times q} v_{n+1} \quad \cdots$$

Exemples :

— La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = \cdots$ et de premier terme $u_0 = \cdots$.

— La suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ... est la suite .. ..

Propriétés

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $u_0 > 0$:

— Si $q > 1$, (u_n) est croissante ; si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante ; si $q = 1$, (u_n) est constante.

— Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.

— Pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Remarque :

— Pour prouver qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

— Pour prouver qu'une suite (u_n) est géométrique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n. ....
   ....
2. Calculer u_7 et u_{11}. ....
   ....

Propriétés

Trois nombres positifs x, y et z sont des termes consécutifs d'une suite géométrique si la moyenne géométrique du plus petit et du plus grand est égale au troisième nombre, soit $\sqrt{xz} = y$.

Exemples :

1. 132, 264 et 528 sont-ils les termes consécutifs dune suite géomé-trique ? ....
   ....
2. La suite (v_n) est telle que : $v_{11} = 12$, $v_{12} = 24$ et $v_{13} = 58$. La suite (v_n) est-elle géométrique ?.
   ....

Propriétés

— Pour tout entier naturel n et pour tout réel $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

— Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exemples :

1. Calculer : $1+3+3^2+\cdots+3^{10} =$. . . . .
   . . . .
2. La somme des 20 premeirs termes d'une suite géométrique, de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 5 est égale à :. . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .