Taux d'évolution & Indice

Terminale STMG : maths-mde.fr

1 Proportion et pourcentage

Propriété

La proportion, exprimée en pourcentage, d'une grandeur x par rapport à une grandeur y est obtenue en effectuant le calcul $\frac{x}{y} \times 100$.

Exemple :
On réalise un sondage auprès de 400 personnes concernant les mesures prises par le gouvernement. Le nombre de personnes interrogés est $n_E = 400$. Parmi ceux-ci, le nombre de ceux satisfaits est $n_S = 94$.
La proportion de personnes pleinement satisfaites des mesures prises par le gouvernement est égale à : $p = \frac{n_S}{n_E} =$. . . . .

Propriété

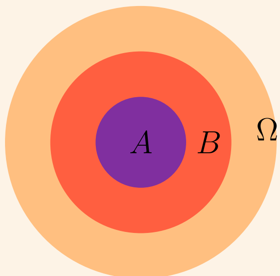
Calculer $x\%$ d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

Exemple :
30 euros représente 5% de 600 euros. En effet, ...

2 Proportion de proportion

Propriété

On considère trois ensembles A, B et Ω emboités tels que $A \subset B \subset \Omega$.
On note p la proportion de la population de A dans la population de B.
On note p la proportion de la population de B dans la population de Ω.
Alors la proportion de la population de A dans la population Ω est égale à $p \times p'$.



Exemple :
Un maraîcher vend des légumes en direct à la ferme et sur des marchés mais aussi dans des supermarchés locaux. Au cours du mois de Juin, il a vendu 78% de sa production en direct, et parmi ces légumes, 65% ont été vendu à la ferme.
La proportion p_1 de légumes vendus en direct est $p_1 = \cdots$.
La proportion p_2 de légumes vendus à la ferme parmi ceux vendus en direct est $p_2 = 0,65$.
On calcule : $p = p_1 \times p_2 =$. . . . .
La proportion de sa production vendu directement à la ferme est de $\cdots\cdots$.

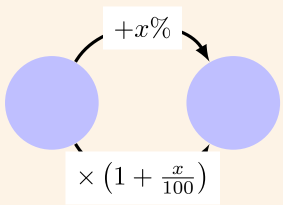
3 Augmentation et réduction en pourcentage

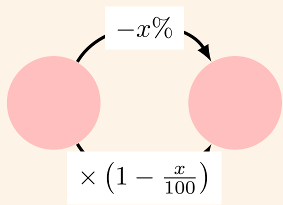
Propriété

— Augmenter une grandeur d'un pourcentage de $x\%$ revient à multiplier par $\left(1+\frac{x}{100}\right)$.
$\left(1+\frac{x}{100}\right)$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la hausse.

— Diminuer une grandeur d'un pourcentage de $x\%$ revient à multiplier par $\left(1-\frac{x}{100}\right)$.
$\left(1-\frac{x}{100}\right)$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la baisse.

Représentation schématique :





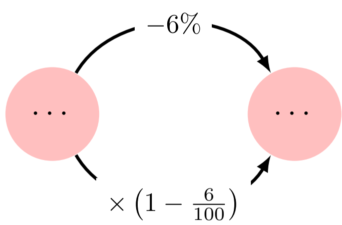
Exemples :

— Augmenter une grandeur de 3% revient à la multiplier par ....

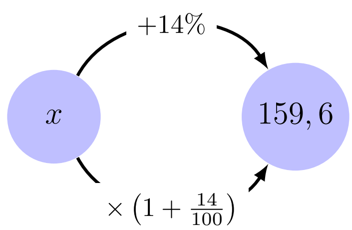
— Diminuer une grandeur de 15% revient à la multiplier par ....

Exemples :

1. Si une action valant 15 euros subit une baisse de 6%, sa nouvelle valeur est de ....
....



2. Le prix d'un produit est de $159,6$ euros après avoir subi une hausse de 14%. Le prix du produit avant la hausse était x tel que
....



4 Taux d'évolution

On considère deux valeurs numériques réelles stritement positives V_I et V_F. La valeur V_I est la valeur initiale et V_F la valeur finale.

Définition

— On appelle variation absolue la différence : $V_F - V_I$.

— On appelle taux d'évolution (ou variation relative) de V_I à V_F, le nombre T défini par : $T = \dfrac{V_F - V_I}{V_I}$.

Exemples :

1. Le cours de l'action d'une entreprise gérant un réseau social est passé de 38 dollars à son introduction en bourse à 26,25 dollars le 18 mai 2013.
$\frac{26,25-38}{38} \times 100 \approx -30,92$. Le prix de l'action a donc baissé d'environ $\cdots\%$.
2. La population de la ville de Noisy le Grand passe de 55 000 à 74 250 habitants.
La variation absolue de cette population est de ....
La variation relative est de 35%. En effet, ...

Remarques :

- Un taux d'évolution positif est un taux d'augmentation et un taux d'évolution négatif est un taux de diminution ou de baisse.
- Un taux d'évolution s'exprime toujours par rapport à la valeur initiale.

Propriété

Soit T le taux d'évolution entre V_I et V_F. Ainsi, $CM = 1 + T$.
Avec $CM = \dfrac{V_F}{V_I}$ le coefficient multiplicateur.

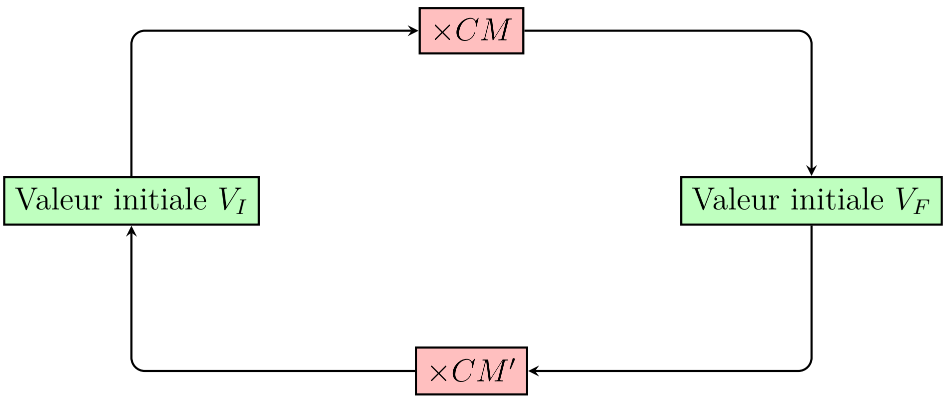
Exemples :

1. Le cours de l'action d'une entreprise gérant un réseau social est passé de 38 dollars à son introduction en bourse à 26,25 dollars le 18 mai 2013.
   $CM = \dfrac{V_F}{V_I} = \frac{26{,}25}{38} = \cdots$ et $T = CM - 1 = \cdots\cdots - 1 = \cdots\cdots$.
   Le prix de l'action a donc baissé de ... %.
2. La population de la ville de Noisy le Grand passe de 55 000 à 74 250 habitants.
   Le coefficient multiplicateur est égal à ....
   Le taux d'évolution vaut ....

5 Évolution réciproque

Définition

Soit T le taux d'évolution entre deux valeurs V_I à V_F et CM son coefficient multiplicateur associé. L'évolution T' de V_F à V_I est appelé le taux d'évolution réciproque de T dont le coefficient multiplicateur CM' associé est : $CM' = \dfrac{1}{CM}$.



Exemples :

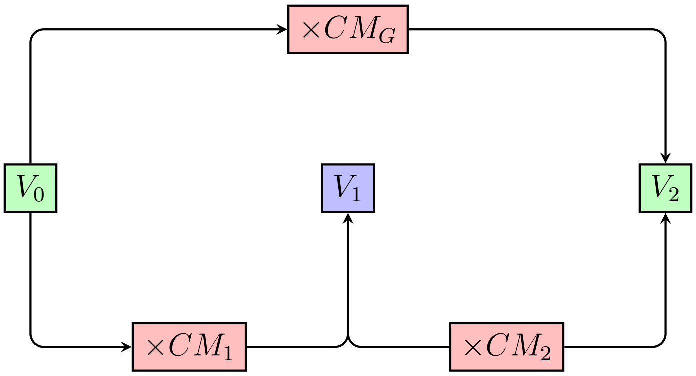
1. Un prix augmente de 25% : il a donc été multiplié par $CM = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.
   Le coefficient multiplicateur réciproque qui permettrait de revenir au prix de départ est de :
   $$CM' = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$
   Or, $0,8 - 1 = -0,2$ ce qui correspond donc à une baisse de $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.
2. Le prix du gasoil a augmenté de 20% en un an. Son prix actuel est de 1,07€ par litre.
   ....
   ....
   ....
   Il y a un an le litre de gasoil valait environ $\cdots$€.

6 Évolutions successives

6.1 Rappels

Définition

Soit T_1 le taux d'évolution entre deux valeurs V_0 à V_1 et T_2 le taux d'évolution entre les valeurs V_1 à V_2. L'évolution globale de V_0 à V_2 , noté T_G, a pour coefficient multiplicateur CM_G avec : $CM_G = CM_1 \times CM_2$.



Exemple :

1. Le nombre d'abonnés d'un journal en ligne augmente de 30% avant de baisser de 10%.
   Il est donc multiplié par $\cdots$ puis par $\cdots$. Alors $CM_G = \cdots \times \cdots = \cdots$.
   Cela correspond à un taux de $\cdots - \cdots = \cdots$.
   Le taux d'évolution global est donc $T_G = \cdots \cdots = \cdots \cdots$, soit $\cdots \cdots$%.
2. La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 3,4% les deux années suivantes.
   ....
   Le coefficient multiplicateur global est égal à environ 0,9546, soit un taux global d'évolution d'environ $0,9546 - 1 = -0,0453$. Il s'agit donc d'une baisse globale d'environ 4,53%.
   Remarque : Ce n'est absolument pas la somme des taux successifs : $2,3 - 3,4 - 3,4 = -4,5$.

6.2 Taux global

Propriété

Si une quantité subit n évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux t_1, t_2, …, t_n à partir d'une valeur initiale y_I, alors la quantité finale est :

$$y_F = (1 + t_1)(1 + t_2)\ldots(1 + t_n)y_I$$

$(1 + t_1)(1 + t_2)\ldots(1 + t_n)$ est le **coefficient multiplicateur global.**
$(1 + t_1)(1 + t_2)\ldots(1 + t_n) - 1$ **est le taux global.**

Exemple : Un capital de 12000 euros au 1° Janvier 2020 subit chaque mois de l'année 2020 une hausse de 1 %.

1. Par quel nombre est-il multiplié chaque mois ? ....
2. Quel est le montant du capital au 1° Janvier 2021 ? ....
   ....

6.3 Équations $x^n = a$

Propriété

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$, le nombre $a^{\frac{1}{n}}$ applé racine n-ième du nombre a.

Exemples :

1. $x^3 = 64$ si et seulement si $x = 64^{\frac{1}{3}}$ autrement dit $x = 4$.
2. $x^3 = -8$ si et seulement si ....
3. $x^3 = 27$ si et seulement si ....

6.4 Application au calcul de taux moyens

Propriété

Si une quantité subit n évolutions successives de taux t_1, t_2, ..., t_n, on appelle alors **coefficient multiplicateur moyen** le nombre

$$((1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n))^{\frac{1}{n}}$$

et **taux moyen** le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre

$$((1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n))^{\frac{1}{n}} - 1$$

C'est le taux d'évolution, qui, s'il avait été identique à chacune des n évolutions, aurait donné la même valeur finale que les différents taux t_1, t_2, etc. successivement appliqués.

Exemples :

— Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %.
....
En outre, $0,8450 - 1 = -0,1550$ soit 15,5 % de baisse annuelle en moyenne.

— Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit t le taux moyen de l'augmentation. On a $(1+t)^{\cdots} = \cdots$ donc $1 + t = \cdots^{\cdots}$ donc $t = 1,6^{\cdots} - 1$ d'où $t \approx 0,1247$ c'est à dire 12,47 % d'augmentation par an en moyenne.

6.5 Indice

Définition

On appelle **indice** i d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1 de base 100, le nombre :

$$i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$$

Exemples :

On suit l'évolution du prix d'un produit : il valait 16 € en 2006 et vaut 18,2 € en 2007.
On a alors ....
L'indice du prix en 2007 par rapport à 2006 est donc $\cdots$.

Propriété

Soit t le taux d'évolution d'une quantité y_1 à une quantité y_2. On suppose que l'on connait l'indice i de y_2 par rapport à y_1. Alors

$$t = \frac{i}{100} - 1$$

Exemple :

On prend pour référence de l'indice des prix des produits manufacturés l'année 2004. Si l'indice en 2005 vaut 105,3 alors le taux d'augmentation a été de 5,3 %. Si entre 2004 et 2006, les prix ont augmenté de 9,7 % alors l'indice des prix en 2006 est 109,7 %.