Variables aléatoires discrètes finies

Terminale STMG : maths-mde.fr

1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition

Le tableau ci-dessous représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

L'espérance de X est le nombre : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$.

Exemple : Dans un jeu, on lance un dé équilibré. Le joueur :
- gagne 5 points si le 6 sort ;
- gagne 1 point si le 3, le 4 ou le 5 sort ;
- perd 5 points si le 1 ou le 2 sort.

On note G le gain (nombre de point) à chaque lancer : il peut être positif ou négatif.

$\{G=5\}$ correspond à l'événement « Le joueur gagne 5 points » dont la probabilisé est $\dfrac{1}{6}$.

Calculer $P(\{G=1\})$ et $P(\{G=-5\})$.

....

....

Le gain moyen « espéré » est appelé « espérance de G ». On la note $E(G)$.

$$\begin{aligned} E(G) &= 5\times P(G=5) + 1\times P(G=1) + (-5)\times P(G=-5) \\ &= \cdots\cdots\cdots \\ &= \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

2 Loi binomiale

Définition

La répétition de façon identique et indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre p donne un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus suit alors la loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété

Soit une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, vérie : $E(X) = n \times p$.

Exemple : Un magasin propose à ses clients sa nouvelle carte de fidélité. On suppose que la probabilité qu'un client l'accepte est de 0,4. Lorsqu'un client se présente à la caisse, il peut l'accepter ou la refuser. On appelle S le succès « Le client accepte la carte » et E l'échec « Le client refuse la carte ».

1. Cette expérience aléatoire correspond à une épreuve de Bernoulli. Indiquer son paramètre p.

   ....

2. n clients se présentent à la caisse, chacun fait son choix indépendamment des autres. On obtient n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On suppose que $n=2$. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de clients qui accepteront la carte.

   (a) Compléter le tableau.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

(b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

. . . .

3 Coefficients binomiaux

Propriété. (admise)

Soit n un entier naturel et k un entier naturel $(k \leqslant n)$.
Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins correspondant à k succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves.
Cas particuliers : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n-1} = n$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Propriété

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors : $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Exemple : Une entreprise produit des machines pour l'industrie. Son directeur affirme que seulement 40% des machines auront besoin d'un entretien au cours des cinq prochaines années. Un chef d'entreprise achète quatre de ces machines. On pose X la variable aléatoire qui, à tout ensemble de quatre machines, associe le nombre de machines qui nécessiteront un entretien dans les cinq ans.On appelle « succès » l'événement « la machine nécessitera un entretien ».

1. En utilisant un arbre, donner le nombre de chemins à 2 succès parmi 4. On le note $\binom{4}{2}$.
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
2. En déduire $P(X = 2)$.
. . . .
. . . .
3. Compléter : $\binom{4}{0} = \cdots$; $\binom{4}{1} = \cdots$; $\binom{4}{3} = \cdots$ et $\binom{4}{4} = \cdots$.

4 Triangle de Pascal

Dans le tableau ci-dessous, le coefficient $\binom{n}{k}$ est situé à l'intersection de la ligne n et de la colonne k. Certaines valeurs sont déjà données.

n \ k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Exemples : Par lecture du tableau, donner la valeur de :

- $\binom{2}{1}$ . . . .
- $\binom{3}{2}$ . . . .

Propriété

Pour tout entier naturel $n \leqslant 2$ et pour tout entier $(1 \leqslant k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Dans le triangle de Pascal, chaque coefficient (sauf dans la première colonne et la diagonale) s'obtient en ajoutant le coefficient au-dessus de lui avec le coefficient à gauche de ce dernier.

Exemples :

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$.
   (a) Compléter : $\binom{10}{0} = \cdots$ et $\binom{10}{1} = \cdots$.
   (b) En déduire la probabilité des événements : $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$.
   ....
   ....
2. En utilisant le triangle de Pascal compléter :
   $\binom{5}{0} = \cdots$; $\binom{5}{1} = \cdots$; $\binom{5}{2} = \cdots$; $\binom{5}{3} = \cdots$; $\binom{5}{3} = \cdots$ et $\binom{5}{5} = \cdots$;
3. On pose X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,25$. Arrondir les résultats à 0,001. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $P(X = 3) =$ ....
   ....
   (b) $P(X \leqslant 1) =$ ....
   ....
   ....