3 Série d'exercices

Fonctions exponentielles

Corrigés — Classe : Tle STMG — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Déterminer le sens de variation des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $t \longmapsto -2 \times 1{,}4^t$;

b. $t \longmapsto 9{,}8 \times 0{,}57^t$;

c. $t \longmapsto 0{,}8 \times 1{,}25^t$.

Exercice n°2

Déterminer le sens de variation des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $x \longmapsto \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$;

b. $x \longmapsto 2 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$;

c. $x \longmapsto -\dfrac{2}{7} \times \left(\dfrac{503}{502}\right)^x$.

Exercice n°3

Écrire sous la forme d'une seule puissance de 2 :

- $a = 2^{1,5} \times 2^{-3}$;
- $b = \left(2^{4,5}\right)^3$;
- $c = 2^3 \times 4^2$;
- $d = \dfrac{2^5}{4}$.

Exercice n°4

Écrire sous la forme d'une seule puissance de 3 :

- $a = \dfrac{3^{4,6}}{\left(3^{1,3}\right)^2} \times \dfrac{3^{0,8}}{3^5}$;
- $b = 3^{3,15} \times 9^{2,2} \times 27^{0,4}$.

Exercice n°5

Simplifier les expressions suivantes, puis calculer leurs valeurs :

- $a = 5^{1,7} \times 5^{1,3}$;
- $b = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^6$;
- $c = 4^{-0,7} \times \dfrac{1}{4^{0,3}}$;
- $d = \dfrac{6^{4,5} \times 6^{2,3}}{\left(6^{1,2}\right)^3}$.

Exercice n°6

Simplifier les expressions suivantes, puis calculer leurs valeurs :

- $\left(\dfrac{a^3}{a^{1,5}}\right)^2$;
- $\left(x^{1,2} \times x\right)^2$;
- $t^{4,2} \times \dfrac{\left(t^{2,8}\right)^2}{t^{8,1}}$;
- $\dfrac{a^2 \times \left(a^{-1}\right)^3}{a^{-1,2} \times a^6}$.

Exercice n°7

Compléter les phrases suivantes.

1. Une multiplication par 4,096 est équivalente à $\cdots$ multiplications par 1,6.
2. Une multiplication par $\cdots$ est équivalente à 4 multiplications par 1,2.
3. Une multiplication par 0,168 07 est équivalente à 5 multiplications par $\cdots$

Exercice n°8

Résoudre sur $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

- $x^2 = 0{,}518\ 4$;
- $x^4 = 0{,}008\ 1$;
- $x^4 = 6{,}859$;
- $x^5 = 7{,}593\ 75$.

Exercice n°9

Déterminer le nombre décimal t solution des équations suivantes, puis l'exprimer en pourcentage.

- $(1+t)^3 = 1{,}092\ 727$;
- $(1+t)^2 = 0{,}960\ 4$;
- $(1+t)^4 = 0{,}062\ 5$;
- $(1+t)^3 = 2{,}352\ 637$.

Exercice n°10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1{,}01^x$.

1. Quel est le sens de variation de f ?
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1{,}01^x > 1{,}01^{3,5}$.

Exercice n°11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}33^x$.

1. Quel est le sens de variation de f ?
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $0{,}33^x \leqslant 0{,}33^{1,8}$.

Exercice n°12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4^x$.

1. Quel est le sens de variation de f ?
2. Calculer $f(3{,}5)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4^x \geqslant 128$.

Exercice n°13

Le chiffre d'affaires d'une entreprise a augmenté de 38 % en trois ans. Calculer l'augmentation annuelle moyenne à 0,1% près.

Exercice n°14

La taxe foncière en France a augmenté en moyenne de 21,26% en cinq ans, de 2008 à 2013. Déterminer son augmentation annuelle moyenne à 0,1 près

Exercice n°15

1. L'évolution d'une quantité q est donnée suivant un temps t par
$$q(t) = 20 \times 0{,}85^t.$$
   (a) Quelle est la valeur de $q(0)$?
   (b) Quel est le taux d'évolution de la quantité q par unité de temps ?
2. Mêmes questions avec $q(t) = 18{,}5 \times 1{,}62^t$.

Exercice n°16

Le nombre de joueurs à un jeu vidéo en milliers est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 12]$ par
$$f(x) = 65 \times 1{,}05^x$$
où x est le nombre de mois écoulés depuis le lancement du jeu. Au bout de combien de temps (en mois et jour) atteindra-t-on 100 millions de joueurs ?

Exercice n°17

Au premier janvier 2019, la population lettone est estimée à 1 917 512 habitants. Elle diminue de 1% par an.

1. On la modélise par une suite en notant un le nombre d'habitants en Lettonie au 1er janvier de l'année $(2019 + n)$, pour tout entier naturel n.
   (a) Déterminer la nature de la suite (u_n), et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Combien d'habitants peut-on prévoir en Lettonie au 1er janvier 2050 selon ce modèle ?
2. On décide de prolonger la suite (u_n) en une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(t) = ka^t$$
telle que,pour tout entier naturel n, $f(n) = u_n$.
   (a) Donner les valeurs des réels k et a.
   (b) Déterminer, selon ce modèle, le nombre d'habitants en Lettonie au 1er septembre 2020.
   (c) Calculer $f(8{,}25)$ et interpréter le résultat.
   (d) Même question avec $f(-1{,}5)$.

Exercice n°18

La pression atmosphérique est égale à 1 013 hPa (hectoPascal) au niveau de la mer, et diminue de 12% à chaque fois que l'on monte de 1 000 m. Il s'agit d'une décroissance exponentielle. On peut la modéliser par une fonction P de l'altitude h en milliers de mètres vérifiant :
$$P(h) = ka^h.$$

1. Déterminer les constantes k et a.
2. Calculer la pression à 5 500 m d'altitude à 1 hPa près.

Exercice n°19

En 1984, l'aquarium de Monaco a introduit accidentellement en Méditerranée la Caulerpa taxifolia, dite « algue tueuse ». Celle-ci prolifère rapidement, détruisant la flore et la faune locales. La superficie occupée par cette algue est donnée (en m^2) par la fonction f définie sur $[0; 12]$ par :
$$f(t) = 4{,}198^t$$
où t représente le temps écoulé (en année) depuis le 1er juillet 1984.

1. Donner, dans des unités appropriées, la superficie occupée par l'algue tueuse le 1er juillet 1984 ;le 1er juillet 1996 ; le 1er janvier 1991.
2. À quelle date la superficie occupée a-t-elle atteint un hectare ?
3. Ce modèle peut-il être encore valable en 2021 ?Justifier votre réponse.

Exercice n°20

La température (en °C) d'une tasse de café que l'on laisse refroidir après l'avoir sortie d'un four à micro-ondes diminue en fonction du temps t (en minute) suivant la formule :
$$T(t) = 21 + 65 \times 0{,}9^t.$$

1. Quelle est la température du café à sa sortie du four, puis au bout de 5 minutes ?2
2. Combien de temps doit attendre une personne qui aime boire son café à 55°C ?
3. Quelle semble être la température de la pièce ?

Exercice n°21

L'évolution d'une tumeur cancéreuse comporte une phase de croissance exponentielle. Sa vitesse d'évolution est représentée par le temps de doublement du nombre de cellules de la tumeur. Elle dépend du type de cancer et du patient. La tumeur est détectable à partir de 1 g, elle contient alors 109 cellules et on considère que le cancer est irréversible lorsque la tumeur dépasse 1 kg. Dans le cas d'un cancer du sein, on suppose que le nombre de cellules cancéreuses est donné par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par
$$f(t) = 2^{\frac{t}{90}}$$
où t représente le temps écoulé (en jour) depuis l'apparition de la première cellule cancéreuse.

1. (a) Déterminer le nombre de cellules cancéreuses au bout de 720 jours, puis au bout de 5 ans.
   (b) Quel est le temps de doublement de cette tumeur ?
2. Python On utilise une fonction Python pour déterminer à quel moment le cancer est détectable.