Suites numériques

Corrigés

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

Soit la suite géométrique (u_n) telle que $u_2 = 1$ et la raison $q = \frac{1}{2}$.

1. (u_n) est une suite géométrique de raison q, ainsi $u_2 = u_0 q^2$.
Dès lors, $u_0 = \frac{u_2}{\frac{1}{2^2}} = 4 \times u_2 = 4 \times 1 = 4$.

2. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
De plus, $-1 \leqslant q \leqslant 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Par produit, on obtient : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + u_0 \times \frac{1}{2} + \cdots + u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= u_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \\ &= 4\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= -8\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]. \end{aligned}$$

4. $S_6 = -8\left[\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right] = -8\left[\frac{1}{128} - 1\right] = \frac{127}{16}$.

5. $-1 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par somme et produit, on obtient : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} -8\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] = 8$.

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1. $u_1 = \frac{3u_0 + 2}{u_0 + 4} = \frac{3 \times 2 + 2}{2 + 4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ et $u_2 = \frac{3u_1 + 2}{u_1 + 4} = \frac{3 \times \frac{4}{3} + 2}{\frac{4}{3} + 4} = \frac{6}{\frac{16}{3}} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$.
Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

2. $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{2 - 1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$.

3. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} \\ &= \frac{\frac{3u_n+2-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2(u_n+4)}{u_n+4}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{\frac{2u_n+-2}{u_n+4}}{\frac{5u_n+10}{u_n+4}} \\
&= \frac{2u_n-2}{5u_n+10} \\
&= \frac{2}{5}\times\frac{u_n-1}{u_n+2} \\
&= \frac{2}{5}v_n.
\end{aligned}
$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{2}{5}$.

4 Pour tout entier naturel n, $v_n=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

5 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2} &\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n+2-3}{u_n+2} \\
&\Leftrightarrow v_n=1-\frac{3}{u_n+2} \\
&\Leftrightarrow v_n-1=-\frac{3}{u_n+2} \\
&\Leftrightarrow 1-v_n=\frac{3}{u_n+2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1-v_n}=\frac{u_n+2}{3} \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{1-v_n}=u_n+2 \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{1-v_n}-2=u_n \\
&\Leftrightarrow \frac{1+2v_n}{1-v_n}=u_n.
\end{aligned}
$$

Or, $-1<\frac{2}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$. Par produit, on obtient alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.
Ce qui entraine par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2v_n)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-v_n)=1$.
Et enfin par quotient, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Exercice 3 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et pour tout $n\in N$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{n}{2}+1$.

1 $u_1=\frac{1}{2}u_0+\frac{0}{2}+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ et $u_2=\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}=\frac{11}{4}$.

2 On pose $v_n=u_n-n$.

(a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1}-(n+1) \\
&= \frac{1}{2}u_n+\frac{n}{2}+1-n-1 \\
&= \frac{1}{2}u_n-\frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2}(u_n-n) \\
&= \frac{1}{2}v_n.
\end{aligned}
$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) $-1 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par produit, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n + n) = +\infty$.

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in N$, $u_{n+1} = \frac{-4}{4+u_n}$.

$\boxed{1}$ $u_1 = \frac{-4}{4+u_0} = -1$; $u_2 = \frac{-4}{4+u_1} = \frac{-4}{4-1} = -\frac{4}{3}$ et $u_3 = \frac{-4}{4+u_2} = \frac{-4}{4-\frac{4}{3}} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$.

$\boxed{2}$ On pose $v_n = \frac{1}{2+u_n}$.

(a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2+u_{n+1}} - \frac{1}{2+u_n} \\ &= \frac{1}{2-\frac{4}{4+u_n}} - \frac{1}{2+u_n} \\ &= \frac{4+u_n}{8+2u_n-4} - \frac{1}{2+u_n} \\ &= \frac{4+u_n}{4+2u_n} - \frac{1}{2+u_n} \\ &= \frac{4+u_n}{4+2u_n} - \frac{2}{4+2u_n} \\ &= \frac{2+u_n}{4+2u_n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{2} + \frac{n}{2}$.

(c) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{2+u_n} \quad &\Leftrightarrow \quad 2+u_n = \frac{1}{v_n} \\ &\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1}{v_n} - 2 \\ &\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{2}{n+1} - 2. \end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$.

Exercice 5 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+3} \end{cases}$

$\boxed{1}$ (a) $u_1 = \sqrt{u_0^2+3} = \sqrt{1+3} = 2$.

$u_2 = \sqrt{u_1^2+3} = \sqrt{2^2+3} = \sqrt{7}.$
$u_3 = \sqrt{u_2^2+3} = \sqrt{7+3} = \sqrt{10}.$

(b) L'écart $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2 On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est positif et on pose $v_n = u_n^2$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v^n &= u_{n+1}^2 - u_n^2 \\ &= u_n^2 + 3 - u_n^2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 1.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 + nr = 1 + 3n$.
Or, $u_n = \sqrt{v_n}$. Donc, $u_n = \sqrt{1+3n}$.

(c) Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned} u_n > 50 &\Leftrightarrow \sqrt{1+3n} > 50 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+3n}^2 > 50^2 \\ &\Leftrightarrow 1+3n > 2500 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2499}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $n_0 = E\left(\frac{2499}{3}\right) + 1 = 834$ est le plus petit entier tel que $u_n > 50$.

Exercice 6 :

On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve en naturelle.
En 2019, il y avait 100 tigres. Une étude a montré que chaque année, 10% de la population de tigres meurt. En conséquence on introduit, chaque année, 5 nouveaux tigres à la réserve. On note u_n le nombre de tigres en 2019 + n.

1 Le nombre de tigres dans la réserve en 2020 est égal à 95. En effet,
$100 \times (1-10\%) + 5 = 100 \times 0,9 + 5 = 95$.

2 $u_0 = 100$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-10\%)u_n + 5 = 0,9u_n + 5$.

3 On pose $v_n = u_n - 50$.

(a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\ &= 0,9u_n + 5 - 50 \\ &= 0,9u_n - 45 \\ &= 0,9(u_n - 50) \\ &= 0,9v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 0,9 et le premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 50$.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 50 \times 0,9^n$.

(c) $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$. Par ailleurs, $u_n = v_n + 50$, donc par produit et par somme on obtient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 50$.

(d) Dans ce contexte, le nombre de tigres décroit et à terme dans quelques années, il va se stabiliser autour de 50 tigres.

Exercice 7 :

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1 000 ℓ.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore. Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $mg.\ell^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3 mg.\ell^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu. Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 $mg.\ell^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 $mg.\ell^{-1}$. Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 $mg.\ell^{-1}$. En effet,
$\dfrac{15\ g}{50\ m^3} = \dfrac{15\ 000\ mg}{50\ 000\ \ \ell} = \dfrac{3}{10}\ \ mg.\ell^{-1} = 0,3\ \ mg.\ell^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n le taux de chlore, en $mg.\ell^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $u_0 = 0,7$. On admet que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,92u_n + 0,3$.
   (a) $u_1 = 0,92u_0 + 0,3 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944 \approx 0,94$.
   $u_2 = 0,92u_1 + 0,3 = 0,92 \times 0,944 + 0,3 = 1,16848 \approx 1,47$.
   On pose $v_n = u_n - 3,75$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3,75 \\ &= 0,92u_n + 0,3 - 3,75 \\ &= 0,92u_n - 3,45 \\ &= 0,92(u_n - 3,75) \\ &= 0,92v_n. \end{aligned}$$
   Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 0,92 et le premier terme $v_0 = u_0 - 3,75 = -3,05$.
   (c) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -3,05 \times 0,92^n$.
   (d) $-1 < 0,92 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,92^n = 0$. Par ailleurs, $u_n = v_n + 3,75$, donc par produit et par somme on obtient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3,75$.

3. À long terme, le taux de chlore s'établira à 3,75 $mg.\ell^{-1} \notin [1;3]$, l'eau de la piscine ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python pour que la fonction AlerteChlore renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $u_n > s$.

```python
def AlerteChlore(s) :
    n=0
    u=0.7
    while u <= s
        n = n+1
        u = 0.92*u+0.3
    return n
```

5. On obtient $n = 17$. On déduit alors qu'après 17 jours, le taux ne chlore ne sera plus conforme car il dépassera $mg.\ell^{-1}$.

Exercice 8 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0,75u_n + 5 \end{cases}$

1. $u_1 = 0,75 \times u_0 + 5 = 0,75 \times 2 + 5 = 3$.
$u_2 = 0,75 \times u_1 + 5 = 0,75 \times 3 + 5 = 7,25$.

2 On peut montrer que la forme explicite de u_n est : $u_n = -18 \times 0,75^n + 20$.

(a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -18 \times 0,75^{n+1} + 20 - (-18 \times 0,75^n + 20) \\ &= -18 \times 0,75^{n+1} + \cancel{20} + 18 \times 0,75^n - \cancel{20} \\ &= 18 \times 0,75^n \times (-0,75 + 1) \\ &= 4,5 \times 0,75^n. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,75^n > 0$. Donc, la suites (u_n) est strictement croissante.

(b) Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant 20$.

La suites (u_n) est majorée et croissante, elle est donc convergente, d'après la propriété de convergence monotone.

Par ailleurs, $-1 < 0,75 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +infty} 0,75^n = 0$. Dès lors, par somme et produit, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20$

3 Le programme suivant, en Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $u_n \geqslant 19,5$.

```
def seuil(s) :
    n=0
    u= 2
    while u <19.5 :
        u = -18*0,75**2+20
        n = n+1
    return n
```

Compléter ce programme afin que le programme renvoie la valeur attendue.

4 En utilisant la calculatrice, on obtient $n = 13$.

5 À partir $n = 13$, $u_n \in [19,5; 20]$.

Exercice 9 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$.

1 $u_1 = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 6$.
$u_2 = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 + 6 = 28$.

2 (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 2n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = 6$ et $u_1 > 2$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée, autrement dit, $u_{n+1} > 2(n+1)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n > 2n &\Leftrightarrow 5 \times u_n > 5 \times 2n \\ &\Leftrightarrow 5u_n - 8n > 10n - 8n \\ &\Leftrightarrow 5u_n - 8n + 6 > 2n + 6 \\ &\Leftrightarrow 5u_n - 8n + 6 > 2(n+1) + 4. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $2(n+1) + 4 > 2(n+1)$ donc $u_{n+1} > 2(n+1)$. Autrement dit, l'hérédité est vérifiée.

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul, $u_n > 2n$.

(b) $2 > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$.

En utilisant le théorème de comparaison, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3 Soit $p \in \mathbb{N}$.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc pour tout réel $A >$, il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \leq n_n$, $u_n > A$.
Dès lors, pour un réel $A = 10^p > 0$, il existe au moins un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel $n > N$, on a $u_n > 10^p$.

(b) Dans cette question $p = 6$. Écrire un algorithme permettant de calculer N puis donner la valeur affichée.

```
def seuil(s) :
    n=0
    u= 0
    while u<=1000000 :
        u = 5*u-8*n+6
        n = n+1
    return n
```

Exercice 10 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1. \end{cases}$

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathscr{P}(n) : n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée, autrement dit, $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} \times n \leqslant \frac{3}{4} \times u_n \leqslant \frac{3}{4} \times (n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}n + \frac{n}{4} \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{n}{4} \leqslant \frac{3}{4} \times (n+1) + \frac{n}{4}, \quad \text{car, } n \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}n + \frac{n}{4} + 1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{n}{4} + 1 \leqslant \frac{3}{4} \times (n+1) + \frac{n}{4} + 1, \quad \text{car, } 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{n}{4} + 1 \leqslant n + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\dfrac{7}{4} < 2$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} < n+2$. Autrement dit, l'hérédité est vérifiée.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

$\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
Donc, la suite (u_n) est croissante.

$\boxed{3}$ Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - n$.

(a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - (n+1) - (u_n - n) \\ &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 - u_n + n \\ &= -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4}(u_n - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$ et le premier terme $v_0 = 1$.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $u_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n + n$.

(c) $-1 < -\dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Donc, par addition, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 11 :

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique. Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes. Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000. En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (u_n), définie par : $u_0 = 0,1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 1,6u_n - 1,6u_n^2$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

$\boxed{1}$ $u_1 = 1,6 \times u_0 - 1,6 \times u_0^2 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2 = 0,16 - 0,016 = 0,144.$
Ainsi, le nombre d'insectes au bout d'un mois s'élève à 144 000.

$\boxed{2}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.

(a) Soit $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$;

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 1,6x - 1,6x^2 = x \\ &\Leftrightarrow 0,6x - 1,6x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(0,6 - 1,6x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,6 = 1,6x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{1,6} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

(b) f est une fonction dérivable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, car c'est un polynôme de degré 2.
$f'(x) = 1,6 - 3,2x$.
f' est une fonction affine, son signe est donc positive sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

x	0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0
f	0	$\nearrow$	

Ainsi, f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

$\boxed{3}$ (a) On considère pour tout entier n la propriété $\mathscr{P}(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$, car $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 0,114$.
Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
Par hypothèse de récurrence, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
Or, f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.
Autrement dit, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0,4 < \frac{1}{2}$.
L'hérédité est vérifiée.
Conclusion : Pour tout entier n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

(b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

(c) En attentant l'étude du point fixe, on peut utiliser la calculatrice et conjecturer le résultat.
$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0,375$.

(d) On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
    u=0.1
    n=0
    while u<a :
        u=1.6*u-1.6*u**2
        n=n+1
    return n
```

(e) Si on saisit seuil(0.4), le programme n'affichera aucune valeur car u_n n'est jamais supérieur à 0.4.

(f) La valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35) est 6. Cela signifie que 6 est le plus petit entier vérifiant $u_n \geqslant 0,35$.