Exercice n°1

1. On souhaite résoudre l'équation différentielle : $y' + \pi y = 1$.
   On applique le résultat du cours ; les solutions sont alors :
   $$y(x) = Ce^{-\pi x} + \frac{1}{\pi}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
2. On souhaite résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 5y = x$.
   — L'équation homogène associée (E_0) : $y' - 5y = 0$ admet pour solutions :
   $$y_0(x) = Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
   — On cherche une solution particulière de (E) de la forme $u(x) = ax + b$ (car le second membre de (E) est une fonction affine). Ainsi,
   $$\begin{aligned} u'(x) - 5u(x) = x &\iff a - 5(ax+b) = x \\ &\iff -5ax + (a-5b) = x \\ &\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ a - 5b = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{25} \end{cases} \end{aligned}$$
   Par conséquent, $u(x) = -\frac{x}{5} - \frac{1}{25}$ est une solution particulière de (E).
   — On en déduit alors que les solutions de (E) sont :
   $$y(x) = -\frac{x}{5} - \frac{1}{25} + Ce^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°2

1. L'équation $y' = 3y - 9$ est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ donc d'après le cours, les solutions de cette équation sont les fonctions :
   $$y(x) = Ce^{3x} - \frac{-9}{3}, \qquad C \in \mathbb{R}$$
   soit, après simplification :
   $$y(x) = Ce^{3x} + 3, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
   On vérifie en calculant :
   $$\begin{aligned} y'(x) - 3y(x) &= 3Ce^{3x} - 3\big(Ce^{3x} + 3\big) \\ &= 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} - 9 \\ &= -9. \end{aligned}$$
   On a bien $y' - 3y = -9$, soit $y' = 3y - 9$.
2. On pose (E) : $y' = 2y - x^3$.
   (a) $y_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$.
   Donc, $y_1'(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$.
   On a alors :
   $$\begin{aligned} &y_1'(x) - 2y_1(x) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} - 2\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right) \\ &= -x^3. \end{aligned}$$
   Ainsi, $y_1'(x) = 2y_1(x) - x^3$. La fonction y_1 est donc une solution de (E).
   (b) De la solution particulière $y_1(x)$, on déduit que l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions :
   $$y(x) = y_1(x) + y_0(x)$$
   où $y_0(x)$ sont les solutions de l'équation homogène associée à (E), donc de la forme :
   $$y_0(x) = Ce^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
   Ainsi, les solutions de (E) sont :
   $$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} + Ce^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°3

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :
$$y' - 2y = 7\sin x. \tag{E}$$

1. D'après le cours, (E_0) a pour solutions : $y_0(x) = Ce^{2x}$, où $C \in \mathbb{R}$.
2. (a) $f(x) = a\cos x + b\sin x \Rightarrow f'(x) = -a\sin x + b\cos x$.
   $$\begin{aligned} &f \text{ solution de (E)} \\ &\iff f'(x) - 2f(x) = 7\sin x \\ &\iff -a\sin x + b\cos x - 2(a\cos x + b\sin x) = 7\sin x \\ &\iff (-2a+b)\cos x + (-a-2b-7)\sin x = 0 \\ &\iff \begin{cases} -2a + b = 0 \\ -a - 2b = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 2a \\ -a - 2(2a) = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 2a \\ a = -\dfrac{7}{5} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = -\dfrac{14}{5} \\ a = -\dfrac{7}{5} \end{cases} \end{aligned}$$
   Ainsi,
   $$f(x) = -\frac{14}{5}\cos x - \frac{7}{5}\sin x$$
   est une solution particulière de (E).

(b) On déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions :

$$y(x) = -\frac{14}{5}\cos x - \frac{7}{5}\sin x + Ce^{2x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°4

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + 5y = 12\cos x. \qquad \text{(E)}$$

1. D'après le cours, (E_0) a pour solutions : $y_0(x) = Ce^{-5x}$, où $C \in \mathbb{R}$.
2. (a) $f(x) = a\cos x + b\sin x \Rightarrow f'(x) = -a\sin x + b\cos x$.

   f solution de (E)

   $$\begin{aligned}
   &\iff f'(x) + 5f(x) = 12\cos x\\
   &\iff -a\sin x + b\cos x + 5(a\cos x + b\sin x) = 12\cos x\\
   &\iff (5a + b - 12)\cos x + (-a + 5b)\sin x = 0\\
   &\iff \begin{cases} 5a + b = 12\\ a = 5b\end{cases}\\
   &\iff \begin{cases} 26b = 12\\ a = 5b\end{cases}\\
   &\iff \begin{cases} b = \frac{6}{13}\\ a = \frac{30}{13}\end{cases}
   \end{aligned}$$

   Ainsi,
   $$f(x) = \tfrac{30}{13}\cos x + \tfrac{6}{13}\sin x.$$
   est une solution particulière de (E).

   (b) On déduit de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions :

   $$\boxed{y(x) = \tfrac{30}{13}\cos x + \tfrac{6}{13}\sin x + Ce^{-5x},\ C \in \mathbb{R}.}$$

Exercice n°5

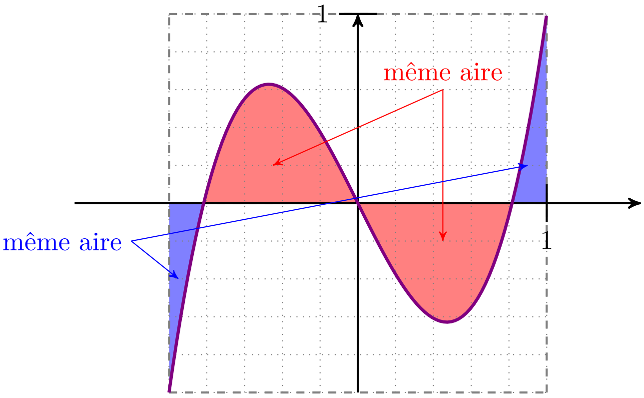
Voici une primitive de chacune des fonctions f.

1. $F(x) = 5x$.
2. $F(x) = 3 \times \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{3}{2}x^2 + 2x$.
3. $F(x) = -8 \times \frac{1}{2}x^2 - 3x = -4x^2 - 3x$.
4. $F(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$.
5. $F(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}x^6 + 8 \times \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x = -\frac{1}{18}x^6 + 2x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x$.
6. $F(x) = e^x$.
7. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.
8. $F(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ car si $u(x) = x^2 + x + 1$, alors $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
9. $f(x) = -\frac{5}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = -\frac{5}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ donc $F(x) = -\frac{5}{2}\ln\left(x^2 + 1\right)$.
10. $f(x) = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ donc $F(x) = -3 \times \frac{1}{x} = -\frac{3}{x}$.

Exercice n°6

Voici les intégrales calculées.

1. Cherchons avant tout une primitive de $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1}$.
   Si on pose $u(x) = e^x + x + 1$, alors $u'(x) = e^x + 1$ donc $f = \frac{u'}{u}$.
   Par conséquent, une primitive de f est $F = \ln(u)$, soit :
   $$F(x) = \ln\left(e^x + x + 1\right).$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}
   \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x+1}\,dx &= F(1) - F(0)\\
   &= \ln(e+2) - \ln(2)\\
   \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x+1}\,dx &= \ln\left(\frac{e+2}{2}\right).
   \end{aligned}$$
2. Une primitive de e^{ax+b} est :
   $$f(x) = e^{ax+b} \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}.$$
   Ainsi, une primitive de $f(x) = e^{2x+1}$ est $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$ et donc :
   $$\begin{aligned}
   \int_0^1 e^{2x+1}\,dx &= F(1) - F(0)\\
   &= \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e\\
   \int_0^1 e^{2x+1}\,dx &= \frac{1}{2}e\left(e^2 - 1\right).
   \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}
   \int_3^5 \left(e^x + x - 3\right)\,dx &= F(5) - F(3),\\
   &\text{avec } F(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - 3x\\
   &= \left(e^5 + \frac{25}{2} - 15\right) - \left(e^3 + \frac{9}{2} - 9\right)
   \end{aligned}$$
   $$\int_3^5 \left(e^x + x - 3\right)\,dx = e^5 - e^3 + 2.$$
4. $$\begin{aligned}
   \int_{-1}^1 \left(3x^3 - 2x\right)\,dx &= F(1) - F(-1), \text{ avec } F(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^2\\
   &= \frac{3}{4} - 1 - \left(\frac{3}{4} - 1\right)
   \end{aligned}$$
   $$\int_{-1}^1 \left(3x^3 - 2x\right)\,dx = 0.$$
   remarque :
   Il n'est pas incohérent de trouver une intégrale égale à 0. Cela signifie que sur l'intervalle considéré, la courbe représentative de la fonction est tantôt positive, tantôt négative, et que l'aire des parties sous l'axe des abscisses est égale à celle des parties au-dessus :



Exercice n°7

1. $F(x) = x\ln x - x$.
   ***F* est une primitive de *f* si $F' = f$.**

   $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$.
   Ainsi, F est bien une primitive de f.
2. $$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\ dx &= F(e) - F(1)\\ &= (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1)\\ &= (e\times 1 - e) - (1\times 0 - 1)\\ &= 0 - (-1)\end{aligned}$$
   $$\int_1^e \ln x\ dx = 1.$$

Exercice n°8

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

1. Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Alors, $P(1) = 1^3 - 2\times 1^2 - 5\times 1 + 6 = 0$.
   Ainsi, $\alpha = 1$ est une racine de P.
2. De la question précédente, on peut conclure que $P(x) = (x-1)(x^2+bx+c)$.
   En développant, on a :
   $$\begin{aligned}P(x) &= x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c\\ &= x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c.\end{aligned}$$
   Par identification, on a alors :
   $$\begin{cases} b - 1 = -2\\ c - b = -5\\ -c = 6\end{cases}$$
   Soit $b = -1$ et $c = -6$. Ainsi, $P(x) = (x-1)(x^2-x-6)$.
   Le discriminant du second facteur est $\Delta = 25$, d'où les racines suivantes :
   $$\beta = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} = 3.$$
   Les trois racines de P sont donc $\alpha = 1$, $\beta = -2$ et $\gamma = 3$.
3. Déterminons les réels A, B et C tels que :
   $$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}.$$
   — $(x-1)f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)} = A + \dfrac{B(x-1)}{x+2} + \dfrac{C(x-1)}{x-3}$.
   Si $x = 1$, cela nous donne : $\boxed{\dfrac{1}{-6} = A}$.
   — $(x+2)f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{A(x+2)}{x-1} + \dfrac{C(x+2)}{x-3}$.
   Si $x = -2$, cela nous donne : $\dfrac{1}{15} = B$.
   — $(x-3)f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A(x-3)}{x-1} + \dfrac{B(x-3)}{x+2} + C$.
   Si $x = 3$, cela nous donne : $\dfrac{1}{10} = C$.

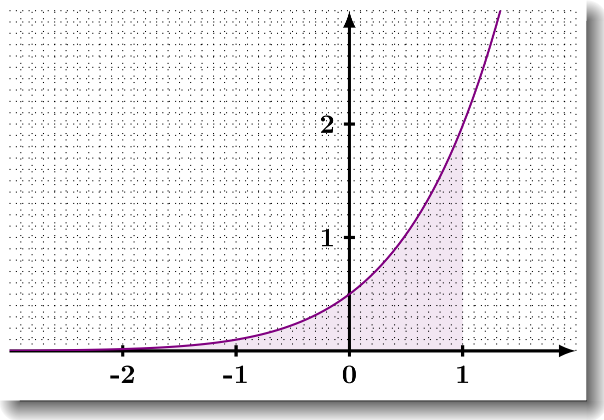
   Ainsi :
   $$f(x) = \frac{-1}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{10(x-3)}.$$
4. $$\begin{aligned}&\int_4^5 f(x)\ dx\\ &= -\frac{1}{6}\int_4^5 \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{15}\int_4^5 \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{10}\int_4^5 \frac{dx}{x-3}\\ &= -\frac{1}{6}\big[\ln(x-1)\big]_4^5 + \frac{1}{15}\big[\ln(x+2)\big]_4^5 + \frac{1}{10}\big[\ln(x-3)\big]_4^5\\ &= -\frac{1}{6}(\ln 4 - \ln 3) + \frac{1}{15}(\ln 7 - \ln 6) + \frac{1}{10}(\ln 2 - \ln 1).\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}&\int_4^5 f(x)\ dx\\ &= \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{15}\ln 7 - \frac{1}{15}\ln 2 - \frac{1}{15}\ln 3 + \frac{1}{10}\ln 2\\ &= \frac{1}{30}\ln 3 - \frac{3}{10}\ln 2 + \frac{1}{15}\ln 7\\ &= \frac{1}{30}\ln\left(\frac{147}{512}\right).\end{aligned}$$

Exercice n°9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

1. On peut compter entre 138 et 140 petits carreaux dans le domaine colorié.
   Or, 1 petit carreau correspond à $0{,}1\times 0{,}1 = 0{,}01$ unité d'aire.
   $140 \times 0{,}01 = 1{,}4$ donc on peut écrire que $\boxed{\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\ dx \approx 1{,}4}$



2. $$e^x - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x\left(1+e^x\right)}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}$$
$$= \frac{e^x + e^{2x} - e^x}{1+e^x}$$
$$= \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$
$$= f(x).$$

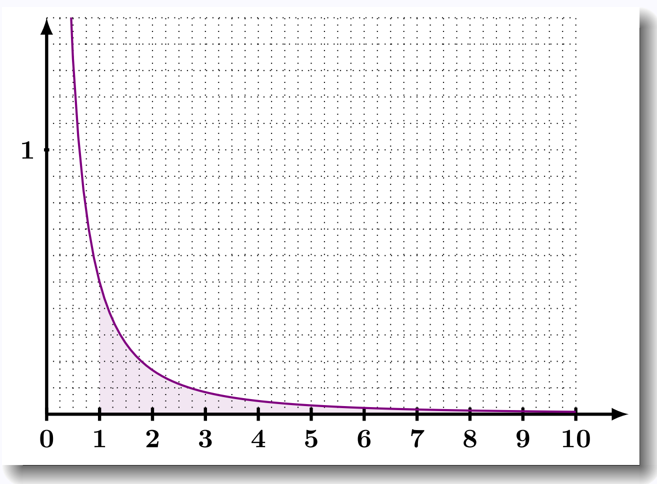
3. $$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx = F(1) - F(-2), \text{ avec } F(x) = e^x - \ln\left(1+e^x\right)$$
$$= e^1 - \ln\left(1+e^1\right) - \left[e^{-2} - \ln\left(1+e^{-2}\right)\right]$$
$$= e - \ln(1+e) - e^{-2} + \ln\left(1+e^{-2}\right)$$
$$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx = e - e^{-2} + \ln\left(\frac{1+e^{-2}}{1+e}\right).$$
à la calculatrice, on trouve $\int_{-2}^{1} f(x)\ dx \approx 1{,}3966$.

Exercice n°10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Sa courbe représentative sur $[0;10]$ est donnée ci-dessous :



1. Un petit rectangle de la grille représente $0{,}25 \times 0{,}1 = 0{,}025$ unité d'aire.

   Nous pouvons compter un peu plus de 20 de ces rectangles dans le domaine colorié, ce qui nous laisse à penser que celui-ci a une aire supérieure à $20 \times 0{,}025 = 0{,}5$ unité d'aire.

   Ainsi, $\int_1^{10} f(x)\ dx \geqslant 0{,}5$.

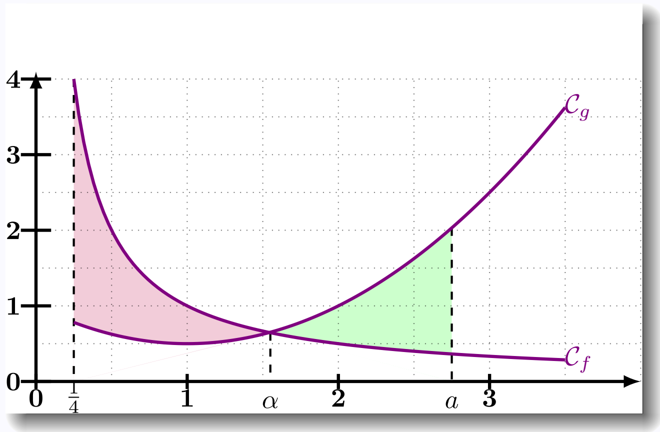
2. $$\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{x(x+1)} - \frac{x}{x(1+x)}$$
$$= \frac{1+x-x}{x(x+1)}$$
$$= f(x).$$

3. $$\int_1^{10} f(x)\ dx = F(10) - F(1), \text{ avec } F(x) = \ln x - \ln(x+1)$$
$$= \ln 10 - \ln 11 - (\ln 1 - \ln 2)$$
$$= \ln 10 - \ln 11 + \ln 2$$
$$\approx 0{,}5978.$$

Exercice n°11

On a représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0{,}5x^2 - x + 1.$$



1. α est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \iff \frac{1}{x} = 0{,}5x^2 - x + 1$$
$$\iff 1 = 0{,}5x^3 - x^2 + x$$
$$\iff 0{,}5x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$$

Posons :
$$h(x) = 0{,}5x^3 - x^2 + x - 1.$$

Alors,
$$h'(x) = 1{,}5x^2 - 2x + 1.$$

Le discriminant de $h'(x)$ est :

$$\Delta = 4 - 6 = -2 < 0$$

donc $h'(x)$ est toujours du signe de « 1,5 », soit toujours positif.

Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

h est continue et croissante sur $[1;2]$; de plus, $h(1) = -0{,}5 < 0$ et $h(2) = 1 > 0$ donc $0 \in [h(1);h(2)]$.

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur$[1;2]$. C'est cette valeur que l'on note α.

On trouve à la calculatrice $\alpha \approx 1{,}54$.

2. Sur $[0{,}25;\alpha]$, $f(x) \geqslant g(x)$ donc l'aire à gauche correspond à $\int_{0,25}^{\alpha} [f(x) - g(x)]\ dx$. Posons :

$$u(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \left(0{,}5x^2 - x + 1\right) = \frac{1}{x} - 0{,}5x^2 + x - 1.$$

Une primitive de $u(x)$ est :

$$U(x) = \ln(x) - 0{,}5 \times \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x = \ln(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_{0,25}^{\alpha} [f(x) - g(x)]\ dx &= U(\alpha) - U(0{,}25)\\ &\approx -0{,}53 - (-1{,}6)\\ &\approx 1{,}07.\end{aligned}$$

Sur $[\alpha; a]$, $g(x) \geqslant f(x)$ donc l'aire à droite correspond à $\int_{\alpha}^{a} [g(x) - f(x)]\ dx$.
Une primitive de $g(x) - f(x)$ est $-U(x)$ ($U(x)$ ayant été calculée précédemment) donc :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{a} [g(x) - f(x)]\ dx &= -U(a) - \big(-U(\alpha)\big)\\ &= -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 0{,}53\end{aligned}$$

On cherche à déterminer a telle que $\int_{0,25}^{\alpha} [g(x) - f(x)]\ dx = \int_{\alpha}^{a} [g(x) - f(x)]\ dx$,c'est-à-dire telle que :

$$\begin{aligned}&\int_{0,25}^{\alpha} [g(x) - f(x)]\ dx = \int_{\alpha}^{a} [g(x) - f(x)]\ dx\\ \iff\ & -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 0{,}53 = 1{,}07\\ \iff\ & -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 1{,}6 = 0.\end{aligned}$$

Bien sûr, il est hors de question de résoudre cette équation algébriquement. On prend donc la calculatrice et on lui demande d'afficher les valeurs (par pas de 0,01) de la fonction $x \longmapsto -\ln(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1{,}6$ à partir de $x = 2$ (par exemple) car on peut imaginer que $a > 2$ d'après la représentation graphique.
On trouve alors que $a \approx 2{,}85$.

Exercice n°12

L'objectif de cet exercice est de déterminer une approximation de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \big(\ln(1+x)\big)^2.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ avec pour unité graphique : $\|\vec{i}\,\| = \|\vec{j}\,\| = 10$ cm.

A : étude des variations de la fonction

1. f est de la forme u^2, avec $u(x) = \ln(x+1)$.
Donc $f' = 2u'u$, avec $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
D'où :

$$f'(x) = \frac{2\ln(x+1)}{x+1}.$$

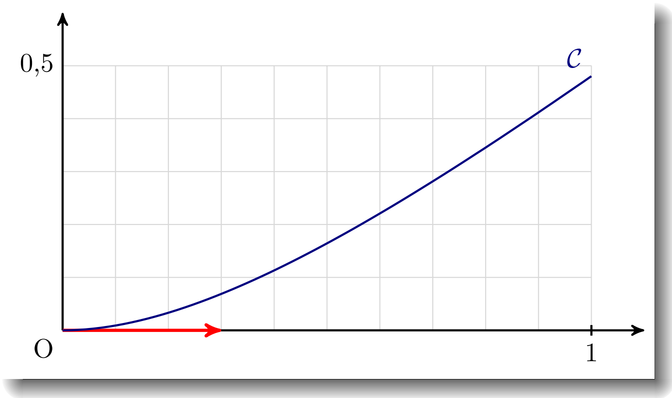
2. Si $x \geqslant 0$, alors $x + 1 \geqslant 1$ et donc $\ln(x+1) \geqslant 0$.
Ainsi, $f'(x)$ est strictement positive donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3. $f(0) = (\ln(0+1))^2 = 0$ et $f(1) = (\ln(1+1))^2 = \ln 2$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	1
f	0 ↗	$\ln 2$

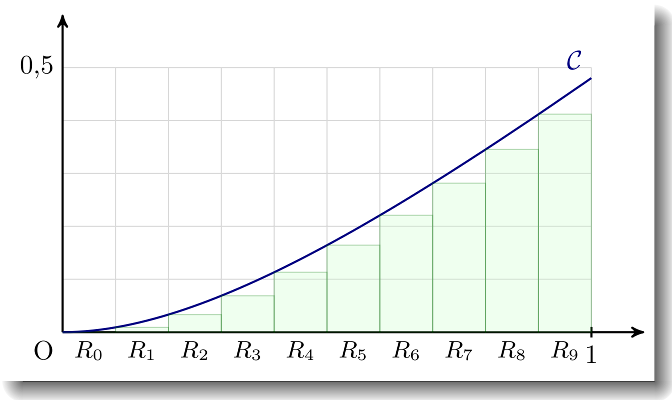
4. $f'(0) = \dfrac{2\ln(0+1)}{0+1} = 0$ donc la tangente à $\mathcal{C}$ en 0 est horizontale. Or, $f(0) = 0$ donc $\mathcal{T}$ est l'axe des abscisses.

5.



B : Calcul de l'approximation de l'aire

1.



2. L'aire du rectangle R_k est :

$$A_k = \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right),$$

où $\dfrac{1}{10}$ représente la mesure de la largeur et $f\left(\dfrac{k}{10}\right)$ sa longueur.
La somme des aires des rectangles est :

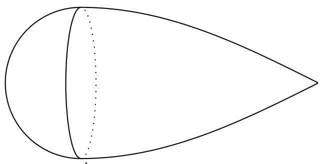
$$\begin{aligned}A &= \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{10} \times f\left(\frac{k}{10}\right)\\ &= \frac{1}{10}\left(f(0) + f(1) + \cdots + f(9)\right)\\ = A &\approx 0{,}165 \text{ u.a.}\\ &\approx 0{,}165 \times 100 \text{ cm}^2\\ A &\approx 16{,}487 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

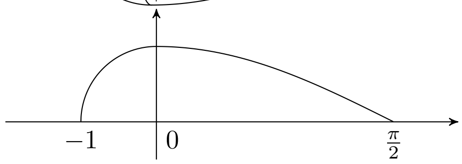
3. $$\int_0^1 f(x)\ dx = F(1) - F(0)$$
$$= 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 4$$
$$\approx 0{,}188.$$

L'aire de $\mathcal{D}$ est donc égale à $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 4$ u.a., soit environ 0,188 u.a.

Exercice n°13

Un bouchon de pêche est obtenu à partir d'une courbe que l'on a fait tourner autour de l'axe des abscisses.





L'équation de la courbe est :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x^2} & , x \in [-1;0] \\ f(x) = \cos(x) & , x\ \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

D'après l'aide donnée dans l'énoncé,

$$\mathcal{V} = \pi \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\ dx$$
$$= \underbrace{\pi \int_{-1}^{0} (f(x))^2\ dx}_{\text{volume de la demie-sphère de rayon 1}} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\ dx$$
$$= \frac{2\pi}{3} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$$
$$= \frac{2\pi}{3} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right)\ dx$$
$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \boxed{\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi^2}{4}}$$

Exercice n°14

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^4 \sqrt{4x - x^2}\ dx.$$

Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ définie sur $[0;4]$. Sa représentation graphique est un demi-cercle de centre $A(2;0)$ situé au-dessus de l'axe des abscisses.

En effet, on a :

$$y = \sqrt{4x - x^2}, y \geqslant 0$$
$$y^2 = 4x - x^2, y \geqslant 0$$
$$0 = x^2 - 4x + y^2, y \geqslant 0$$
$$0 = (x-2)^2 - 4 + y^2, y \geqslant 0$$
$$4 = (x-2)^2 + y^2, y \geqslant 0$$

Cette dernière équation cartésienne est celle du demi-cercle de centre $A(2;0)$ et de rayon $r = 2$.

Ainsi, I représente l'aire de ce demi-cercle. Donc $I = \dfrac{\pi r^2}{2}$ soit $I = 2\pi$.

Exercice n°15

Intégration par parties.

1. $I = \int_1^2 x\sqrt{x}\ dx$. Posons :

$u(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$v'(x) = x$ $\qquad$ $v(x) = \dfrac{1}{2}x^2.$

Alors,

$$I = [(uv)(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\ dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4}\frac{x^2}{\sqrt{x}}\ dx$$
$$= \left(\frac{1}{2}(2)^2\sqrt{2} - \frac{1}{2}(1)^2\sqrt{1}\right) - \frac{1}{4}\int_1^2 x\sqrt{x}\ dx$$
$$I 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}I$$
$$\frac{5}{4}I = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$
$$I = \frac{4}{5}\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$
$$I = \frac{8\sqrt{2} - 2}{5}.$$

2. $J = \int_0^1 xe^x\ dx$. Posons :

$u(x) = x$ $\qquad$ $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$ $\qquad$ $v(x) = e^x.$

Alors,

$$J = [(uv)(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\ dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx$$
$$= e - \left[e^x\right]_0^1$$
$$= e - (e-1)$$
$$J = 1.$$

3. $K = \int_1^e x\ln(x)\ dx$. Posons :

$u(x) = \ln(x)$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2.$

Alors,

$$\begin{aligned} K &= [(uv)(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\ dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\int x\ dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) \\ K &= \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

4. $L = \int_1^e x\big(\ln x\big)^2\ dx$. Posons :

$u(x) = \big(\ln x\big)^2$ $\quad u'(x) = 2\times\ln(x)\times\dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2.$

Alors,

$$\begin{aligned} L &= [(uv)(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\ dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln^2(x)\right]_1^e - \underbrace{\int x\ln(x)dx}_{=K} \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{e^2+1}{4} \\ L &= \frac{e^2-1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice n°16

Intégration par parties.

$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx$. Posons :

$u(x) = \sin(x)$ $\quad u'(x) = \cos(x)$
$v'(x) = e^x$ $\quad v(x) = e^x.$

Alors,

$$S = \big[\sin(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)e^x\ dx}_{=I}.$$

Calculons alors I en posant :

$u(x) = \cos(x)$ $\quad u'(x) = -\sin(x)$
$v'(x) = e^x$ $\quad v(x) = e^x.$

$$\begin{aligned} I &= \big[\cos(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin(x)e^x\ dx \\ &= \big[\cos(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\ dx \\ &= \big[\cos(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} + S. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S &= \big[\sin(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \Big(\big[\cos(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} + S\Big) \\ S &= \big[\sin(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \big[\cos(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} - S \\ 2S &= \big[\sin(x)e^x - \cos(x)e^x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ S &= \frac{1}{2}\Big[\big(\sin(x)-\cos(x)\big)e^x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ S &= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\big(\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\big)}_{=0}e^{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\big(\sin 0 - \cos 0\big)}_{=-1}e^0\Big) \\ S &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice n°17

On cherche à exprimer pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^e x\big(\ln x\big)^n\ dx.$$

Nous avons trouvé I_1 et I_2 dans l'exercice précédent.

1. Posons :

$u(x) = \big(\ln x\big)^n$ $\quad u'(x) = \dfrac{n\big(\ln x\big)^{n-1}}{x}$

$v'(x) = x$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2.$

Alors,

$$\begin{aligned} I_n &= [(uv)(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\ dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\big(\ln x\big)^n\right]_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x\big(\ln x\big)^{n-1}\ dx \\ I_n &= \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1}. \end{aligned}$$

2. Nous avions trouvé dans l'exercice précédent :
— $I_1 = \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{1}{4}$;
— $I_2 = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{1}{4}$.

À l'aide de la relation de récurrence trouvée à la question précédente, on déduit :
— $I_3 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{3}{2}\times I_2 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{e^2}{8} + \dfrac{3}{8}$;
— $I_4 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{4}{2}\left(\dfrac{e^2}{8} + \dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{3}{4}$;
— $I_5 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{e^2}{8} + \dfrac{15}{8}$.

3. De la relation de récurrence $I_n = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n}{2}I_{n-1}$ et de la supposition que $I_n = a_ne^2 + b_n$, nous pouvons déduire :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}(a_ne^2 + b_n) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{(n+1)a_n}{2}e^2 - \frac{n+1}{2}b_n \\ &= \frac{1-(n+1)a_n}{2}e^2 - \frac{n+1}{2}b_n. \end{aligned}$$

Or,

$$I_{n+1} = a_{n+1}e^2 + b_{n+1}.$$

Ainsi, par identification, on a :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{1-(n+1)a_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = -\frac{n+1}{2}b_n}$$

4. $b_1 = \frac{1}{4}$ et $(-1)^{1+1}\frac{1!}{2^{1+1}} = \frac{1}{4}$ donc la propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$.
Supposons qu'elle le soit pour un entier $k \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que :

$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{k!}{2^{k+1}}. \qquad \text{(HR)}$$

Alors,

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= -\frac{1}{2}(k+1)b_{k+1} \text{ d'après la relation de récurrence sur } (b_n) \\ &= -\frac{1}{2}(k+1)\times(-1)^{k+1}\frac{k!}{2^{k+1}} \\ &= (-1)^{k+2}\frac{k!\times(k+1)}{2\times 2^{k+1}} \\ &= (-1)^{k+2}\frac{(k+1)!}{2^{k+2}}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

5. Cette question est très difficile. Il est donc normal d'avoir des difficultés à écrire un tel programme. J'ai décidé d'utiliser les formules explicites de a_n et b_n pour trouver la valeur exacte de I_n, pour un entier $n \geqslant 1$ donné. Cela donne par exemple :

Exercice n°18

1. En intégrant deux fois par parties, calculer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\ dx$.
2. On note :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x\ dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x\ dx.$$

   (a) Calculer $I + J$.
   (b) Calculer $I - J$.
   (c) En déduire I et J.

1. Posons pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad v'(x) = \cos 2x.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur ce même intervalle. Donc, par le théorème d'intégration par parties, on a :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\ dx = \underbrace{\left[x^2\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\ dx.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\ dx$, il est nécessaire de procéder à une seconde intégration par parties. Posons :

$$s(x) = x \quad \text{et} \quad t(x) = \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Alors :

$$s'(x) = 1 \quad \text{et} \quad t'(x) = -\sin 2x.$$

Les fonctions s et t étant dérivables, à dérivée continue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a, par le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} K &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\ dx \\ &= \left[x\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos 2x\ dx \\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2. (a) Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\ dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

On sait que pour tout x,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Donc, d'après 2a, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\ dx = -$$

(b) On en déduit que :

$$\boxed{I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad \boxed{J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}}.$$

Exercice n°19

Une machine-outil achetée neuve 10 000 € admet un prix de revente modélisé par la fonction f définie par :

$$f(x) = 10e^{-0,2x}$$

où $f(x)$ est exprimé en millier d'euros et x en années.

Déterminer le prix de revente moyen de cette machine sur 8 ans depuis sa date d'achat.
Le prix de revente moyen est donné par la valeur moyenne de f sur $[0; 8]$:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{8-0}\int_0^8 f(x)\ dx \\ &= \frac{1}{8}\int_0^8 10e^{-0,2x}\ dx \\ &= \frac{1}{8}\left[F(8) - F(0)\right], \\ &\text{avec } F(x) = 10\times\left(\frac{1}{-0,2}\right)e^{-0,2x} = -50e^{-0,2x} \\ &= \frac{1}{8}\left[-50\,\mathrm{e}^{-0,2\times 8} - \left(-50\,\mathrm{e}^{-0,2\times 0}\right)\right] \\ &= -\frac{50}{8}\,\mathrm{e}^{-1,6} + \frac{50}{8} \\ &\approx 4,988. \end{aligned}$$

On peut donc estimer à 4 988 € le prix moyen de revente de cette machine-outil sur 8 ans.

Exercice n°20

En prenant comme année de référence l'an 2000, le nombre d'habitants en fin d'année $2000+x$ d'une ville nouvelle est approchée par la fonction :

$$f(x) = 18e^{0,034x}$$

où $f(x)$ est exprimé en millier d'habitants.

La population moyenne de la ville entre 2050 et 2080 est la valeur moyenne de f sur $[50; 80]$:

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{80-50}\int_{50}^{80} 10e^{0,034x}\,dx \\
&= \frac{1}{30}\left[F(80) - F(50)\right], \\
&\text{avec } F(x) = 10 \times \frac{1}{0,034}e^{0,034x} = \frac{5\,000}{17}e^{0,034x} \\
&= \frac{1}{30} \times \frac{5\,000}{17}\left[e^{0,034\times 80} - e^{0,034\times 50}\right] \\
&\approx 95,161.
\end{aligned}$$

On peut donc estimer à 95 161 le nombre moyen d'habitants de cette ville entre 2050 et 2080.