1 Principes de base

1.1 Cardinal d'un ensemble

Définition

Le *cardinal* d'un ensemble A est le nombre d'éléments contenus dans A.
On le note :

$$Card(A).$$

Exemple. Si A désigne l'ensemble des cartes qui constituent un jeu de 32 cartes alors $Card(A) = 32$.

Définition

On dit qu'un ensemble A est *fini* si $Card(A)$ n'est pas infini.

1.2 Principe additif

Propriété

Soient A et B deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire n'ayant aucun élément commun, tels que $Card(A) = n$ et $Card(B) = m$. Alors, le nombre de façons de prendre un élément dans A ou un élément dans B est égal à $n + m$.

Exemple. Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.
Je peux donc y choisir un livre de $20 + 10 = 30$ façons différentes.

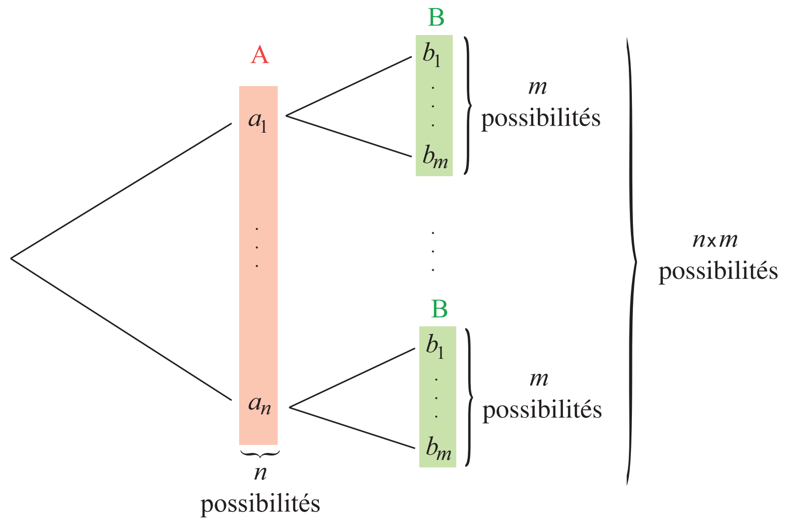
1.3 Principe multiplicatif

Propriété

Soient A et B deux ensembles finis tels que $Card(A) = n$ et $Card(B) = m$.
Le nombre de façons de prendre un élément dans A et un élément dans B est égal à $n \times m$.

Exemple. Dans ma bibliothèque, il y a 20 romans et 10 bandes dessinées.
Je souhaite prendre un livre de chaque sorte. Il y a donc $20 \times 10 = 200$ possibilités.

Les principe multiplicatif peut se représenter sous la forme d'un *arbre des possibilités* :



On peut aussi considérer un tableau à n colonnes et m lignes : il comporte $n \times m$ cellules.

2 Dénombrement

2.1 Factorielle

Définition

La factorielle d'un nombre entier n est le nombre :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Exemple. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

2.2 Permutation

Définition

Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$. Une *permutation* de E est un ensemble composé des n éléments de E.

Exemple. Si $E = \{1; 2; 3\}$ alors $F = \{2; 3; 1\}$ est une permutation de E.

Remarque. E est une permutation de E.

2.3 Arrangement

Définition

Soit n un entier naturel non nul, et soit E un ensemble à n éléments.
Un *arrangement* de p éléments de E est une p-liste d'éléments distincts.

Exemple. Le podium d'une course à 20 participants est un arrangement constitué du premier arrivé, puis du deuxième et enfin du troisième.

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

Exemple. $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.

Il y a donc $6\,840$ podiums possibles pour une course à 20 participants.

2.4 Combinaison

Définition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$, et soit E un ensemble à n éléments.
Une *combinaison* de p éléments de E est un ensemble non ordonné à p éléments distincts pris parmi les n éléments de E.

Exemple. Sur un jeu de 32 cartes, une main de 5 cartes est une combinaison.

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.$$

Exemple. $\binom{32}{5} = \dfrac{32 \times 31 \times \cdots \times (32-5+1)}{5!} = 201\,376$ donc il y a $201\,376$ mains de 5 cartes possibles sur un jeu de 32 cartes.

Propriété

Pour tous entiers naturel n et p tels que $p \leqslant n$ et $n \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Propriété. Relation de Pascal

[relation de Pascal] Pour tous entiers naturel n et p tels que $p \leqslant n$ et $n \neq 0$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

De la propriété relation de Pascal, on déduit un tableau regroupant les différentes valeurs de $\binom{n}{p}$ suivant les valeurs de n et p : c'est le *triangle de Pascal*.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Pour construire et afficher un triangle de Pascal, on peut utiliser le programme Python suivant :

```python
def trianglePascal(n):
    T = [[0] * (n+1) for p in range(n+1)]
    for n in range(n+1):
        if n == 0:
            T[n][0] = 1
        else:
            for k in range(n+1):
                if k == 0:
                    T[n][0] = 1
                else:
                    T[n][k] = T[n-1][k-1] + T[n-1][k]
    return T


T = trianglePascal(15)

for i in range(len(T)):
    print(T[i][:i+1])
```

Pour résumer, on retiendra le tableau suivant :

	Ordre	Modèle	Exemples	Formules
Permutation	oui	tirage sans remise	anagramme	$n!$
p-liste	oui	tirage avec remise	digicode	n^p
Arrangement A_n^p	oui	tirage sans remise	podium d'une course	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$
Combinaison $\binom{n}{p}$	non	tirage sans remise	main dans un jeu de cartes	$\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$