Équations différentielles, primitives et intégration

maths-mde.fr

1 Équations différentielles

1.1 $y' = ay$

Définition

Soit a un nombre réel. Résoudre l'équation $y' = ay$ d'inconnue y signifie trouver toutes les fonctions y dont la dérivée est égale à ay.

Remarque : Une *différentielle* est, dans le vocabulaire scientifique, une dérivée. C'est la raison pour laquelle une équation où l'inconnue est une fonction qui est dérivée au moins une fois est qualifiée d'*équation différentielle*.

Exemples :

1. $y' + y = 0$ est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -1$ car :
$$y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y.$$
2. $y' = \frac{1}{2}y$ est aussi une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{2}$.

Propriété

L'équation :
$$y' = ay$$
admet pour solutions les fonctions de la forme :
$$y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque : Il existe donc une infinité de solutions, définie à une constante C près.

Exemple : L'équation différentielle $y' = -y$ admet pour solutions :
$$y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
On peut facilement vérifier en calculant sa dérivée :
$$y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x).$$

1.2 $y' = ay + b$

Propriété

Soient a et b deux réels. L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions y telles que :
$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple : L'équation différentielle $y' = 3y + 7$ admet pour solutions :
$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{7}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
On peut vérifier l'ensemble des solutions en calculant sa dérivée :
$$y'(x) = 3Ce^{3x}$$

puis en calculant :

$$y'(x) - 3y(x) = 3Ce^{3x} - 3\left(Ce^{3x} - \frac{7}{3}\right)$$
$$y'(x) - 3y(x) = 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} + 3 \times \frac{7}{3}$$
$$y'(x) - 3y(x) = 7.$$

On a bien : $y' - 3y = 7$, soit $y' = 3y + 7$.

1.3 $y' = ay + f$

Définition

Soit f une fonction. On appelle *équation homogène associée* à l'équation $y' = ay + f$ l'équation différentielle $y' = ay$.

Remarque : Si on note (E) l'équation $y' = ay + f$, on note (E_0) son équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation $y' = ay + f$, on utilise la méthode suivante :

— **On résout d'abord (E_0).**
On trouve les solutions de l'équation homogène associée à (E) :
$$y_0(x) = Ce^{ax}.$$

— **On trouve une solution particulière de (E).**
On la note par exemple u ; dans ce cas, on a :
$$u'(x) - au(x) = f(x).$$

— **On ajoute les solutions.**
Les solutions de (E) sont alors :
$$y(x) = y_0(x) + u(x).$$

Remarque : En Terminale, une solution particulière vous sera proposée la plupart du temps.

Exemple : On considère l'équation différentielle :
$$y' = -2y + x^2. \tag{E}$$

— **On résout l'équation homogène associée à (E).**
$$y' = -2y \tag{E_0}$$
admet pour solutions :
$$y_0(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

— **Solution particulière de (E).**
On pose $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. On souhaite montrer que y_1 est une solution particulière de (E). On calcule pour cela sa dérivée :
$$y_1'(x) = x - \frac{1}{2}.$$
Ensuite, on calcule :
$$\begin{aligned} -2y_1(x) + x^2 &= -2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + x^2 \\ &= -x^2 + x - \frac{1}{2} + x^2 \\ &= x - \frac{1}{2} \\ &= y_1'(x). \end{aligned}$$
y_1 est donc bien solution de (E).

— **On conclut en ajoutant les deux résultats.**

Les solutions de (E) sont donc :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2 Primitives

2.1 Introduction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sur I sont appelées les *primitives* de f.

Exemples :

1. Les primitives de $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F : x \longrightarrow e^x + k$, $k \in \mathbb{R}$. En effet, si on dérive $F(x)$, on obtient : $F'(x) = e^x = f(x)$.
2. Les primitives de $g(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $G : \sin x + k$, $k \in \mathbb{R}$ car $G'(x) = g(x)$.

Remarque : Il y a une infinité de primitives ; on dit qu'elles sont définies *à une constante près* (que nous avons noté k dans les exemples précédents). Mais dès que l'on impose une condition sur une de leurs valeurs, il n'en existe plus qu'une. Cette condition est parfois appelée *condition initiale*. Par exemple, la primitive G de la fonction g définie par $g(x) = \cos x$ telle que $G(\pi) = 0$ est $G(x) = \sin x$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

2.2 Primitives usuelles

Un tableau de dérivées usuelles donne, par lecture inverse, un tableau de primitives à connaître.

La fonction usuelle	Ses primitives avec $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x + k$
$x \mapsto x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$ si $-n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$x \mapsto \ln x + k$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + k$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + k$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$

2.3 Primitives et fonctions composées

Il est souvent possible de mettre en évidence la dérivée d'une fonction composée. Le tableau suivant regroupe les cas les plus courants (u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I).

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I.
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$ sur I.
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto f(ax+b) \quad a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$	F primitive de u sur I.

Dans les exemples suivants, nous prenons $u(x) = x^2 + x + 1$.

Exemples :

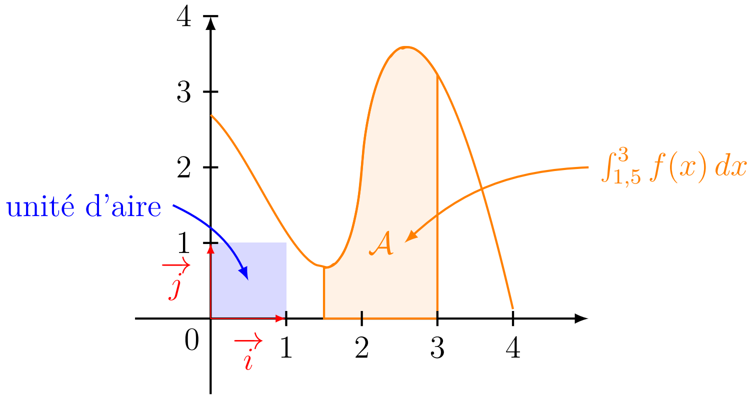
1. Une primitive de $f(x) = (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^5$ est : $F(x) = \dfrac{1}{6}\left(x^2+x+1\right)^6$.
2. Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ se trouve en mettant $f(x)$ sous la forme $f(x) = (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{-2}$.
   On trouve alors : $F(x) = \dfrac{1}{-2+1}\left(x^2+x+1\right)^{-2+1}$, soit $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
3. Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ est : $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$.
4. Une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est : $F(x) = \ln\left(x^2+x+1\right)$.
5. Une primitive de $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}$ est : $F(x) = e^{x^2+x+1}$.
6. Une primitive de $f(x) = \sin(4x-5)$ est : $F(x) = -\dfrac{1}{4}\cos(4x-5)$.

3 Intégration

3.1 Intégrale et aire

Définitions

- Dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle *unité d'aire* l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
- Soit f une fonction *continue* et *positive* sur un intervalle $[a\,;b]$, et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
  L'*intégrale* de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a\;;\;b]$; elle est exprimée en unité d'aire (en abrégé : ua). On la note :
  $$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Définition

Soit f une fonction *continue* et *négative* sur un intervalle $[a\,;b]$, et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à l'opposé de l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ sur $[a\;;\;b]$.

On étend la définition du symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ au cas $a > b$ en posant alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

C'est l'*intégrale de a à b* de f (attention à ne pas évoquer l'*intervalle* $[a\,;b]$ si $a > b$).

3.2 Propriétés de l'intégrale

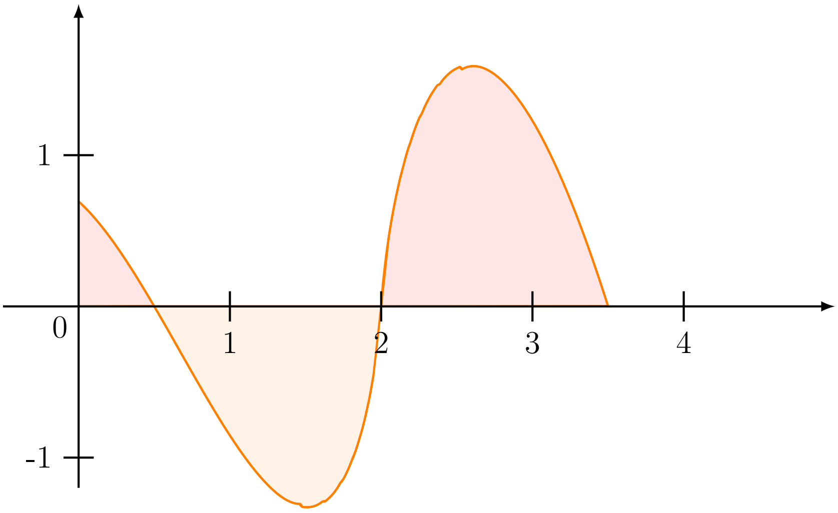
Théorème. Relation de Chasles sur les intégrales

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels appartenant à I. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Il n'existe aucune condition d'ordre entre les réels a, b et c. La relation de Chasles n'impose pas d'avoir $a < b < c$.

Exemple : Quand la fonction f n'est pas de signe constant sur $[a\ ;\ b]$, on utilise la relation de Chasles pour déterminer son intégrale de a à b.



$$\int_0^{3{,}5} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^{0{,}5} f(x)\,dx}_{>0} + \underbrace{\int_{0{,}5}^{2} f(x)\,dx}_{<0} + \underbrace{\int_2^{3{,}5} f(x)\,dx}_{>0}.$$

L'intégrale désigne alors une *aire algébrique*, c'est-à-dire une aire avec un signe (positif ou négatif). Sur cet exemple, il semble que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ car la somme de l'aire des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses semble supérieure à celle du domaine situé en dessous.

Théorème. Parité et périodicité

— Si f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

— Si f est paire, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

— Si f est périodique de période T, alors pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Exemple : La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire et 2π-périodique donc :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \int_{-a}^{a} \sin x\,dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^{a+2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx.$$

Théorème. Linéarité de l'intégrale

Quelles que soient les fonctions f et g continues sur $[a; b]$, pour tous réels λ et μ :

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 \left(3x^2 - 5x + 1\right) dx = 3\int_0^1 x^2\, dx - 5\int_0^1 x\, dx + \int_0^1 1\, dx.$

Théorème. Positivité de l'intégrale

— Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$.

— Si pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leqslant 0$.

Exemple : Sur $[0\ ;\ 1]$, $x^2 \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\, dx \geqslant 0$.

Théorème. Intégration des inégalités

Si pour tout nombre réel x de $[a\,;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$, alors :

$$\int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exemple : On sait que pour $x > 0$, $\ln x < x$ donc $\displaystyle\int_1^2 \ln x\, dx < \int_1^2 x\, dx$.

3.3 Calcul d'une intégrale

3.3.1 Lien entre intégrale et primitive

Théorème

Si f est une fonction continue positive sur $[a\ ;\ b]$ alors la fonction F_a définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dx$$

est la primitive de $f(x)$ qui s'annule en a.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, et soit F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Remarque : $F(b) - F(a)$ est aussi noté $\Big[F(x)\Big]_a^b$. On a alors : $\int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$.

Exemple : On sait qu'une primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ donc :

$$\int_0^1 x^2\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}.$$

3.3.2 Intégration par parties

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur $[a\ ;\ b]$. Alors,

$$\int_a^b u'(x) \times v(x)\, dx = \Big[(uv)(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)\, dx.$$

Exemple : En posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$ sur $[1\ ;\ e]$, on obtient $u(x) = x$

(à une constante près) et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Le théorème donne alors :

$$\begin{aligned}\int_1^e 1 \times \ln x \, dx &= \Big[x \times \ln x\Big]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= [e \ln e - 1 \ln 1] - \int_1^e 1 \, dx \\ &= e - \Big[x\Big]_1^e \\ &= e - (e-1) \\ \int_1^e \ln x \, dx &= 1.\end{aligned}$$

Remarque : L'intégration par parties est un outil très puissant. Si on s'inspire de l'exemple précédent, on peut écrire pour $a > 0$ et $x > 0$:

$$\int_a^x \ln(t) \, dx[t] = x \ln x - x - (a \ln a - a).$$

On peut alors conclure qu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.

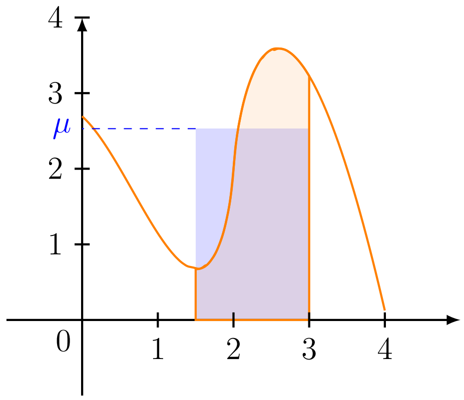
3.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition. S

oit f une fonction définie sur un intervalle $[a \,;\, b]$. On appelle *valeur moyenne de f* le nombre μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Graphiquement, cette valeur correspond à la hauteur du rectangle de base $b - a$ qui a la même aire que le domaine situé entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur $[a \,;\, b]$:



L'aire du rectangle bleu est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx$.

Propriété

Si f est une fonction T-périodique alors :

$$\mu = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx.$$

Remarque : En sciences physiques, la *valeur efficace* est définie comme étant la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la fonction : $e = \sqrt{\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f^2(x) \, dx}$.